

Figura 25 Problema 17.

18. Dos esferas uniformes e idénticas, sin fricción, cada una con un peso W , descansan como se muestra en la figura 26 en el fondo de un recipiente rectangular, fijo. La línea que une los centros de las esferas forma un ángulo θ con la horizontal. Halle las fuerzas ejercidas sobre las esferas (a) por el fondo del recipiente, (b) por los costados del recipiente, y (c) una contra la otra.

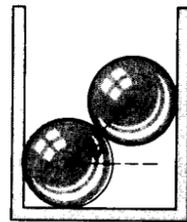


Figura 26 Problema 18.

19. ¿Qué fuerza mínima F , aplicada horizontalmente en el eje de la rueda de la figura 27, es necesaria para elevar la rueda sobre un obstáculo de altura h ? Tome r como el radio de la rueda y W como su peso.

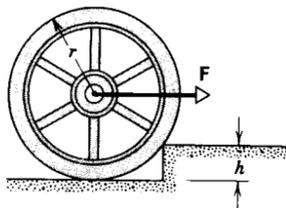


Figura 27 Problema 19.

20. Una balanza está hecha de una barra rígida que puede girar libremente en torno a un punto que no está en el centro de la barra. Se equilibra con pesas desiguales situadas en los platillos a cada extremo de la barra. Cuando se coloca un objeto de masa desconocida m en el platillo del lado izquierdo, se equilibra con un objeto de masa m_1 colocado en el platillo del lado derecho, y de igual modo cuando el objeto de masa m se coloca en el platillo del lado derecho, se equilibra con un objeto de masa

m_2 colocado en el platillo del lado izquierdo. Demuestre que

$$m = \sqrt{m_1 m_2}.$$

21. Una esfera uniforme de peso w está en reposo encajada entre dos planos inclinados de ángulos de inclinación θ_1 y θ_2 (Fig. 28). (a) Suponga que no existe fricción y determine las fuerzas (direcciones y magnitudes) que los planos ejercen sobre la esfera. (b) ¿Qué cambio habría, en principio, si se tomase en cuenta la fricción?

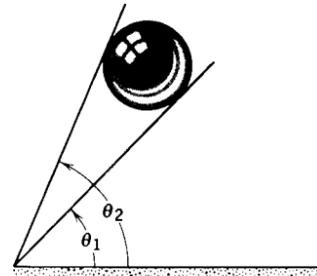


Figura 28 Problema 21.

22. Un objeto de 15.4 kg es levantado por el sistema de poleas que se muestra en la figura 29. El brazo está vertical, mientras que el antebrazo forma un ángulo de 27.0° con la horizontal. ¿Qué fuerzas se ejercen en el antebrazo por (a) el músculo tríceps y (b) el hueso del brazo (el húmero)? El antebrazo y la mano juntos tienen una masa de 2.13 kg con el centro de masa a 14.7 cm (medidos a lo largo del brazo) desde el punto en que los dos huesos están en contacto. El músculo tríceps jala verticalmente hacia arriba en un punto situado a 2.50 cm detrás del punto de contacto.

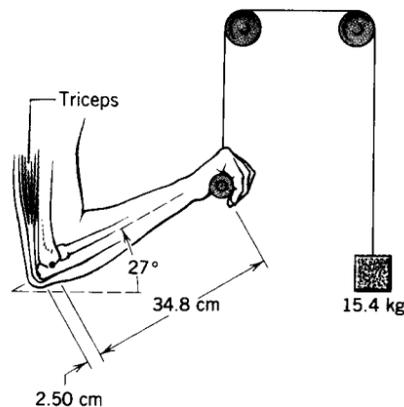


Figura 29 Problema 22.

23. Un letrero cuadrado uniforme, de 52.3 kg, y 1.93 m de lado, está colgado de una barra de 2.88 m de masa despreciable. Un cable está unido al extremo de la barra y a un

punto en la pared a 4.12 m sobre el punto en que la barra se halla fija a la pared, como se muestra en la figura 30. (a) Halle la tensión en el cable. (b) Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la pared sobre la barra.

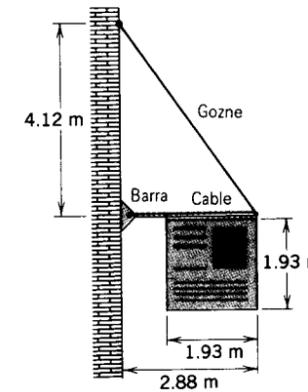


Figura 30 Problema 23.

24. Una puerta de ventilación cuadrada colocada en un techo tiene 3.0 ft (= 0.91 m) de lado y pesa 25 lb (masa = 11 kg), está embisagrada en un lado y tiene un pestillo o cerradura en el lado opuesto. Si el centro de gravedad de la puerta está a 4.0 in (= 10 cm) del centro de la puerta y más cercana al lado embisagrado, ¿qué fuerzas deben sostener (a) el pestillo y (b) las bisagras?
25. Un extremo de una viga uniforme que pesa 52.7 lb y tiene 3.12 ft de longitud está unido a un muro por medio de un gozne. El otro extremo está soportado por un alambre que forma ángulos iguales de 27.0° con la viga y el muro (véase la Fig. 31). (a) Halle la tensión en el alambre. (b) Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza en el gozne.

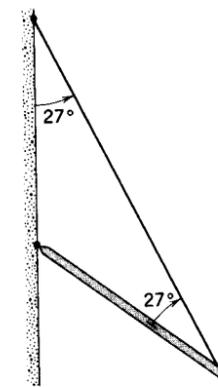


Figura 31 Problema 25.

26. Una puerta de 2.12 m de altura y 0.907 m de anchura tiene una masa de 26.8 kg. Una bisagra situada a 0.294 m del extremo superior y otra situada a 0.294 m del extremo

inferior sostienen cada una la mitad del peso de la puerta. Suponga que el centro de gravedad está en el centro geométrico de la puerta y determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre cada bisagra por la puerta.

27. El sistema mostrado en la figura 32 está en equilibrio. El objeto que cuelga del extremo de la armadura S pesa 513 lb y la propia armadura pesa 107 lb. Halle (a) la tensión en el cable C y (b) las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la armadura por el pivote P .

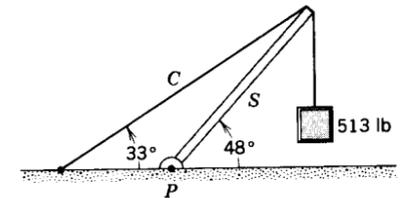


Figura 32 Problema 27.

28. Una barra no uniforme de peso W está suspendida en reposo en una posición horizontal por dos cuerdas delgadas como se muestra en la figura 33; el ángulo que forma una cuerda con la vertical es θ ; la otra cuerda forma ángulo ϕ con la vertical. La longitud de la barra es L . Halle la distancia x desde el extremo izquierdo hasta el centro de gravedad.

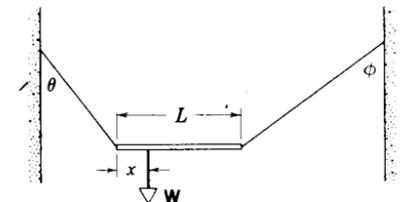


Figura 33 Problema 28.

29. Una barra horizontal delgada AB de peso despreciable y longitud L está pivotada a un muro vertical en A y soportada en B por un alambre delgado BC que forma un ángulo θ con la horizontal. A lo largo de la barra, un peso W puede moverse en cualquier dirección según se defina por la distancia x desde el muro (Fig. 34). (a) Halle la tensión T en el alambre delgado en función de x . Halle (b) la componente horizontal y (c) la componente vertical de la fuerza ejercida sobre la barra por el pivote en A .

30. En la figura 34, la longitud L de la barra es 2.76 m y su peso w es de 194 N. También, $W = 315$ N y $\theta = 32.0^\circ$. (a) ¿Cuál es la distancia máxima x posible antes de que el alambre se rompa? (b) Con W situada en esta x máxima, ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la barra por el pivote?

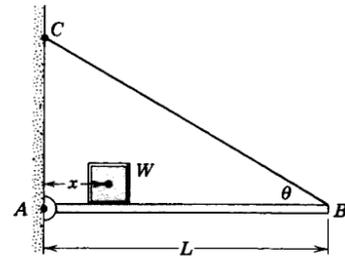


Figura 34 Problemas 29 y 30.

31. Dos vigas uniformes están unidas a una pared con goznes y luego empernadas juntas con holgura como en la figura 35. Halle las componentes horizontal y vertical de (a) la fuerza sobre cada gozne y (b) la fuerza ejercida por el perno sobre cada viga.

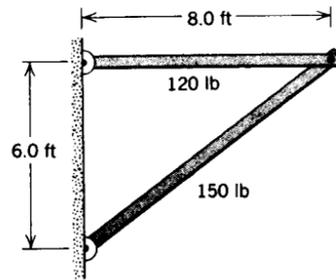


Figura 35 Problema 31.

32. Una plancha de 274 N, de longitud $L = 6.23$ m, descansa sobre el suelo y sobre un rodillo sin fricción situado en la parte superior de un muro de altura $h = 2.87$ m (véase la Fig. 36). El centro de gravedad de la plancha está en su centro. La plancha permanece en equilibrio para cualquier valor de $\theta \geq 68.0^\circ$ pero se resbala si $\theta < 68.0^\circ$. Halle el coeficiente de fricción estática entre la plancha y el suelo.
33. En la escalera de tijera que se muestra en la figura 37, AC y CE tienen 8.0 ft de longitud y están embisagradas en C. BD es una barra de enlace de 2.5 ft de longitud a la mitad de la escalera. Un hombre que pesa 192 lb sube 6.0 ft por la escalera. Suponiendo que el suelo carezca de fricción y despreciando el peso de la escalera, halle (a) la tensión en la barra de enlace y (b) las fuerzas ejercidas sobre la escalera por el suelo. (Sugerencia: Será de ayuda aislar partes de la escalera al aplicar las condiciones del equilibrio.)
34. En el marco cuadrado ABCD que se representa en la figura 38 se produce una tensión T en la barra AB por medio de un tensor de tornillo G. Determine las fuerzas que se producen en las otras barras. Las diagonales AC y BD pasan libremente sobre sí mismas en E. Las consideraciones de simetría pueden conducir a una simplificación considerable en éste y en problemas similares.
35. Una caja cúbica está llena de arena y pesa 892 N. Se desea que la caja "ruede" empujándola horizontalmente en uno de los bordes superiores. (a) ¿Qué fuerza mínima se re-

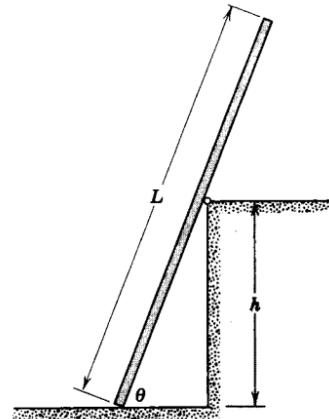


Figura 36 Problema 32.

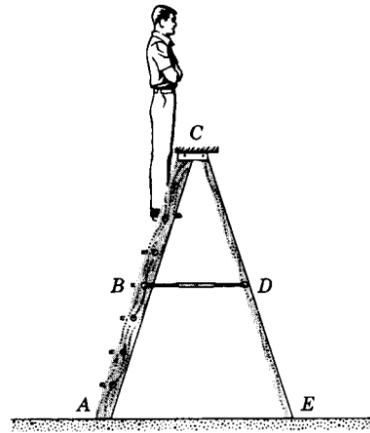


Figura 37 Problema 33.

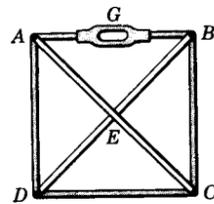


Figura 38 Problema 34.

- quiere? (b) ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática se requiere? (c) ¿Hay una manera más eficiente de hacer que la caja ruede? De ser así, halle la menor fuerza posible que debería aplicarse directamente a la caja.
36. Un automóvil hace una parada de emergencia en una carretera horizontal accionando los frenos de modo que las cuatro ruedas se traban y el auto patina a lo largo de la carretera. El coeficiente de fricción cinética entre las llantas y la carretera es de 0.40. La separación entre los ejes delantero y trasero es de 4.20 m, y el centro de masa

del automóvil se localiza a 1.80 m atrás del eje delantero y a 0.750 m sobre la carretera; véase la figura 39. El automóvil pesa 11.0 kN, con su ocupante. Calcule (a) la deceleración por el frenado del automóvil, (b) la fuerza normal en cada rueda delantera y trasera, y (c) la fuerza de frenado en cada rueda delantera y trasera. (Sugerencia: Aunque el automóvil no esté en equilibrio de traslación, está en equilibrio rotatorio.)

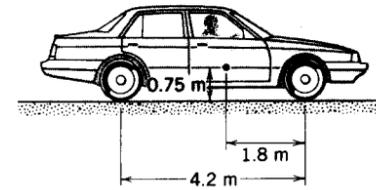


Figura 39 Problema 36.

37. Un problema muy conocido es el siguiente (véase, por ejemplo, *Scientific American*, noviembre de 1964, pág. 128). Se colocan ladrillos uniformes uno sobre otro de manera que tengan el salidizo máximo. Esto se logra haciendo que el centro de gravedad del ladrillo de arriba esté directamente sobre el borde del ladrillo que está debajo, que el centro de gravedad de los dos ladrillos de arriba combinados esté directamente sobre el borde del tercer ladrillo desde arriba, y así sucesivamente. (a) Justifique este criterio del máximo salidizo; halle los salidizos en equilibrio más grandes para cuatro ladrillos. (b) Demuestre que, si el proceso continuara así, podríamos obtener un salidizo tan grande como quisiéramos. (Martin Gardner, en el artículo mencionado anteriormente, afirma: "Con 52 naipes, el primero colocado de modo que su extremo esté al ras con un borde de la mesa, el salidizo máximo es un poco más de $2\frac{1}{4}$ longitudes de naipes...") (c) Suponga ahora, en cambio, que aplicamos ladrillos uniformes de modo que el extremo de un ladrillo se salga del que está abajo por una fracción constante, $1/n$, de una longitud de ladrillo L. ¿Cuántos ladrillos, N, podemos usar en este proceso antes de que la pila se caiga? Compruebe la posibilidad de la respuesta para $n = 1, n = 2, n = \infty$.
38. Una esfera homogénea de radio r y peso W se desliza a lo largo del suelo bajo la acción de una fuerza horizontal constante P aplicada a un cordón, como se muestra en la figura 40. (a) Demuestre que si μ es el coeficiente de fricción cinética entre la esfera y el suelo, la altura h está dada por $h = r(1 - \mu W/P)$. (b) Demuestre que la esfera no está en equilibrio de traslación bajo estas circunstancias. ¿Existe algún punto con respecto al cual la esfera esté en

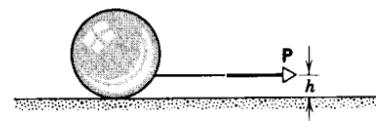


Figura 40 Problema 38.

equilibrio rotatorio? (c) ¿Podemos hacer que la esfera esté en equilibrio de rotación y de traslación, eligiendo una h diferente? ¿Y una dirección de P diferente? Explique.

Sección 14-4 Equilibrio estable, inestable, y neutro de los cuerpos rígidos en un campo gravitatorio

39. Un tazón que tiene un radio de curvatura r reposa sobre una mesa horizontal. Demuestre que el tazón estará en equilibrio estable respecto al punto central de su fondo solamente si el centro de masa del material apilado en el tazón no está tan alto como r sobre el centro del tazón.
40. Un cubo de densidad uniforme y arista a está equilibrado sobre una superficie cilíndrica de radio r como se muestra en la figura 41. Demuestre que el criterio para el equilibrio estable del cubo, suponiendo que la fricción sea suficiente para impedir el resbalamiento, es $r > a/2$.

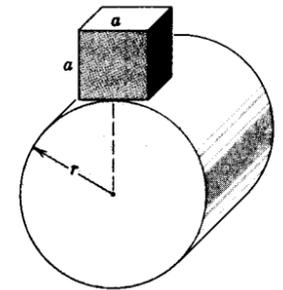


Figura 41 Problema 40.

Sección 14-5 Elasticidad

41. La figura 42 muestra la curva de esfuerzo-deformación de la cuarcita. Calcule el módulo de Young de este material.

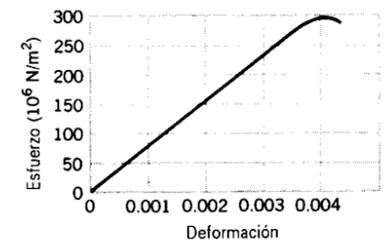


Figura 42 Problema 41.

42. Después de una caída, un alpinista de 95 kg de peso queda columpiándose al final de una cuerda de 15 m de longitud y 9.6 mm de diámetro. La cuerda se estira 2.8 cm. Calcule el módulo de Young de la cuerda.
43. El elevador de una mina está soportado por un solo cable de acero de 2.52 cm de diámetro. La masa total de la jaula del elevador más los ocupantes es de 873 kg. ¿En cuánto se estira el cable cuando el elevador está suspendido a 42.6 m debajo del motor del elevador? (Desprecie la masa del cable.)

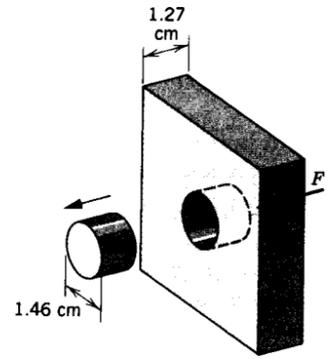


Figura 43 Problema 45.

44. Un poste horizontal de aluminio de 48.0 cm de diámetro sobresale 5.30 cm de un muro. Un objeto de 120 kg está suspendido del extremo del poste. El módulo de corte del aluminio es de $3.00 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. (a) Calcule el esfuerzo cortante en el poste. (b) Halle la deflexión vertical del extremo del poste.
45. Calcule la fuerza F necesaria para troquelar un agujero de 1.46 cm de diámetro en una placa de acero de 1.27 cm de espesor; véase la figura 43. El límite de resistencia al corte del acero es de 345 MN/m^2 .
46. Una barra uniforme de 4.7 kg de masa y 1.3 m de longitud está suspendida de los extremos por dos alambres verticales. Un alambre es de acero y tiene un diámetro de 1.2 mm; el otro alambre es de aluminio y tiene un diámetro de 0.84 mm. Antes de unirlos a la barra, los alambres eran de la misma longitud, o sea, de 1.7 m. Halle el ángulo θ entre la barra y la horizontal; véase la figura 44. (Desprecie el cambio en los diámetros de los alambres; la barra y los alambres están en el mismo plano.)

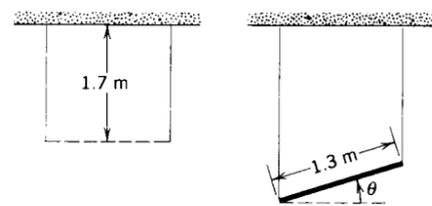


Figura 44 Problema 46.

47. La pala de un rotor de 5.27 m de longitud está compuesta de un material de 4.55 g/cm^3 de densidad y un límite de resistencia a la tensión de 446 MN/m . Calcule la velocidad de rotación más grande posible. Suponga que la pala gira en torno a un eje perpendicular a la pala y que pasa por el extremo.
48. Se va a construir un túnel de 152 m de longitud, 7.18 m de altura y 5.77 m de anchura (de techo plano) a 61.5 m bajo tierra. El techo del túnel va a estar soportado enteramente por columnas de acero cuadradas, cada una con un área de sección transversal de 962 cm^2 . La densidad del material del suelo es de 2.83 g/cm^3 . (a) Calcule el peso

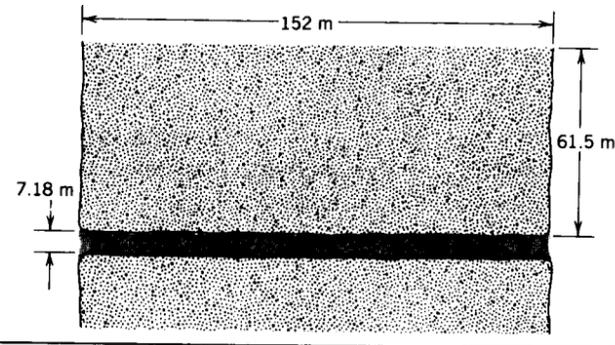


Figura 45 Problema 48.

- que deben soportar las columnas. (b) ¿Cuántas columnas se necesitan para proporcionar un factor de seguridad de 2 contra la rotura? Véase la figura 45.
49. Una losa rectangular de roca descansa sobre un plano inclinado a 26.0° ; véase la figura 46. La losa tiene las dimensiones de 43.3 m de longitud, 2.50 m de espesor, y 12.2 m de anchura. Su densidad es de 3.17 g/cm^3 . El coeficiente de fricción estática entre la losa y la roca sobre la que está es de 0.390. (a) Calcule la componente del peso de la losa que actúa paralela al plano inclinado. (b) Calcule la fuerza estática de la fricción. (c) Comparando (a) y (b), convéncese usted mismo de que la losa está a punto de deslizarse. Solamente evita esto la cohesión entre la losa y el plano inclinado. Se desea estabilizar la losa con anclas dirigidas perpendicularmente al plano inclinado de modo que, despreciando la cohesión, la losa sea estable. Cada ancla tiene un área de 6.38 cm^2 y una resistencia al corte de 362 MN/m^2 . Halle el número mínimo de anclas necesario. (Las tuercas de las anclas no están apretadas y por lo tanto no afectan la fuerza normal.)
50. Considérese una barra de metal de longitud L , área de la sección transversal A , separación atómica de equilibrio x , y módulo de Young E . Cuando se aplica una fuerza de tensión F a la barra, provoca un estiramiento de ΔL . Calcule la constante k de la fuerza atómica derivando expresiones de (a) el número de cadenas de átomos en cualquier sección transversal, (b) el número de átomos en una sola cadena de longitud L , (c) el alargamiento microscópico Δx entre los átomos, y (d) la fuerza de tracción f entre los átomos. (e) Escriba $f = k \Delta x$ y demuestre que $k = Ex$. (f) Calcule el valor de k para un metal típico para el cual $E = 1.2 \text{ GN/m}^2$ y $x = 16 \text{ nm}$.

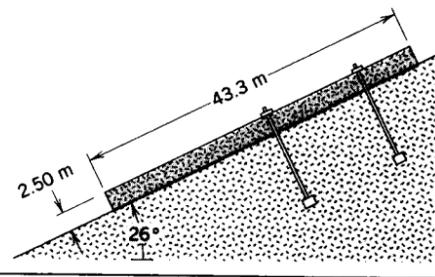


Figura 46 Problema 49.

CAPÍTULO 15

OSCILACIONES

Todos los días nos encontramos con muchas clases de movimiento oscilatorio. Entre los ejemplos más comunes podemos mencionar el péndulo de un reloj al oscilar, el salto de una persona desde un trampolín, y la cuerda de una guitarra al vibrar. En la escala microscópica, otros ejemplos son la vibración de los átomos en el cristal de cuarzo de un reloj de pulsera o la vibración de las moléculas de aire que transmiten las ondas sonoras. Los casos citados son oscilaciones mecánicas. Tampoco nos resultan desconocidas las oscilaciones electromagnéticas, como los electrones que entran y salen en circuitos que dan origen a la transmisión y la recepción de señales de radio o de televisión.

Una característica común de todos estos sistemas, a pesar de las diferencias en sus atributos y en las leyes que rigen su comportamiento, es la fórmula matemática que se utiliza para describir sus oscilaciones. En todos los casos, la cantidad de oscilación, ya sea el desplazamiento de una partícula o la magnitud de un campo eléctrico, puede describirse en términos de funciones seno y coseno, que son las funciones periódicas más conocidas para nosotros.

En este capítulo nos concentraremos en las oscilaciones mecánicas y su descripción. Más adelante, en este libro, estudiaremos las diversas clases de ondas y las oscilaciones electromagnéticas, las cuales utilizan también la misma descripción matemática.

15-1 SISTEMAS OSCILATORIOS

Imaginemos un sistema que oscila, como el péndulo de un reloj o una masa suspendida de un resorte. ¿Cuáles deben ser las propiedades de la fuerza que produzca tales oscilaciones?

Si desplazamos a un péndulo en una dirección desde su posición de equilibrio, la fuerza (debida a la gravedad) impulsa de regreso hacia su posición de equilibrio. Si lo desplazamos en la otra dirección, la fuerza sigue actuando hacia la posición de equilibrio. No importa cuál sea la dirección del desplazamiento, la fuerza siempre actúa en una dirección que restituye al sistema a su posición de equilibrio. Esta fuerza recibe el nombre de fuerza de restitución. (La posición de equilibrio pertenece a la clase que llamamos estable en el capítulo 14; el sistema tiende a regresar al equilibrio cuando se le desplaza ligeramente.)

Consideremos un ejemplo sencillo. Supongamos que tenemos una partícula que puede moverse libremente sólo en la dirección x , y hagamos que la partícula experimente

una fuerza de magnitud constante F_m que actúe en la dirección $+x$ cuando $x < 0$ y en la dirección $-x$ cuando $x > 0$, como se muestra en la figura 1a. La fuerza, que se muestra en la figura 1b, es similar a las fuerzas seccionalmente constantes que consideramos en el capítulo 2.

Una partícula de masa m en la coordenada $x = +x_m$ experimenta una fuerza cuya componente x es $-F_m$, y la componente correspondiente x de la aceleración de la partícula es $-a_m = -F_m/m$. La partícula se mueve hacia su posición de equilibrio en $x = 0$ y llega a esa posición con una velocidad $v = -v_m$. Cuando pasa por el origen a la x negativa, la fuerza se convierte en $+F_m$, y la aceleración es $+a_m$. La partícula pierde velocidad y llega al reposo por un instante en $x = -x_m$ antes de invertir su movimiento a través del origen y regresar eventualmente a $x = +x_m$. En ausencia de la fricción y de otras fuerzas disipativas, el ciclo se repite una y otra vez.

La figura 2 muestra una gráfica del movimiento resultante, trazada al estilo de los ejemplos considerados en el capítulo 2. La posición $x(t)$ consta de una secuencia de segmentos de parábola unidos suavemente, como es siempre el caso del movimiento con aceleración constante. La

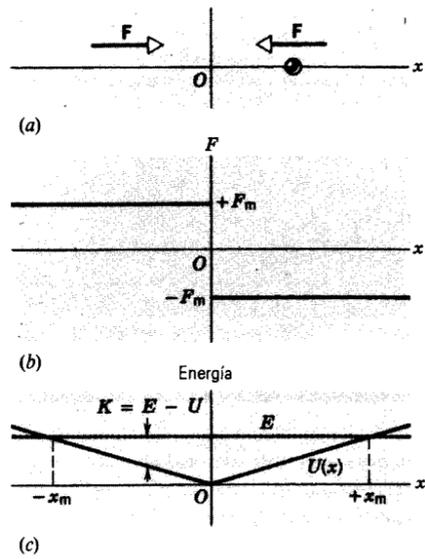


Figura 1 (a) Una fuerza constante F que está siempre dirigida hacia el origen actúa sobre una partícula. (b) Diagrama de esta fuerza seccionalmente constante, igual a $+F_m$ cuando $x < 0$ y a $-F_m$ cuando $x > 0$. Cualquier fuerza real de este tipo debe estar representada por una función continua, aun cuando pueda ser de pendiente muy grande al pasar por $x = 0$. (c) La energía potencial que corresponde a esta fuerza. Si el sistema tiene una energía mecánica total E , entonces la diferencia $E - U$ da la energía cinética en cualquier posición.

partícula oscila yendo y viniendo entre $x = +x_m$ y $x = -x_m$. La magnitud del desplazamiento máximo desde el equilibrio (x_m en este caso) se llama *amplitud* de movimiento. El tiempo necesario para un ciclo completo (una repetición completa del movimiento) se llama *periodo* T , como se indica en la figura 2a. El número de ciclos por unidad de tiempo recibe el nombre de *frecuencia* ν . La frecuencia y el periodo son recíprocos entre sí:

$$\nu = 1/T. \quad (1)$$

El periodo se mide en unidades de tiempo (segundos, por ejemplo), mientras que la frecuencia se mide en una unidad SI: el hertz (Hz),* donde $1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s}$. Entonces, por ejemplo, una oscilación con un periodo de $T = 5 \text{ s}$ tiene una frecuencia $\nu = 0.2 \text{ Hz}$.

Hasta ahora hemos usado una descripción dinámica de la oscilación, pero a menudo es conveniente una descripción en función de la energía. La figura 1c muestra la energía potencial que corresponde a la fuerza de la figura 1b. Nótese que, como se indica con la expresión $F = -dU/dx$, el negativo de la pendiente de $U(x)$ da la fuerza. La energía

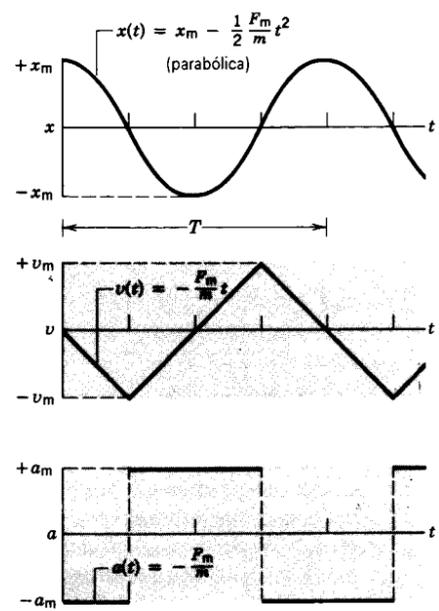


Figura 2 La posición, la velocidad, y la aceleración de la partícula de la figura 1 graficadas en función del tiempo. La aceleración consta de segmentos horizontales alternativos con valores $+F_m/m$ y $-F_m/m$; la velocidad consta de segmentos lineales alternativos con pendientes $+F_m/m$ y $-F_m/m$, y la posición consta de secciones de parábola unidas suavemente. Puesto que la fuerza $F(x)$ es en realidad una función continua, $a(t)$ es también continua, teniendo los segmentos horizontales uniones muy empinadas. Además, los picos agudos de $v(t)$ están redondeados. Sin embargo, las curvas que se muestran son aproximaciones excelentes si la fuerza cambia de $+F_m$ a $-F_m$ durante un intervalo de tiempo muy corto.

mecánica $E = K + U$ permanece constante en un sistema aislado. En cada punto, la diferencia $E - U$ da la energía cinética K en ese punto. Si extendemos la gráfica a desplazamientos suficientemente grandes, eventualmente llegaríamos a posiciones en las que $E = U$ y entonces $K = 0$. En estos puntos, como lo muestra la figura 2, la velocidad es cero y la posición es $x = \pm x_m$. Estos puntos se llaman los *puntos de retorno* del movimiento.

Las figuras 1b y 1c ilustran dos maneras equivalentes de describir las condiciones de la oscilación: la fuerza debe actuar siempre para restituir la partícula al equilibrio, y la energía potencial debe tener un mínimo en la posición de equilibrio.

Siempre agrada trabajar con el caso de la aceleración constante, porque la matemática es sencilla, pero rara vez constituye una descripción precisa de la naturaleza. La figura 3a muestra un ejemplo de una fuerza más realista que puede producir un movimiento oscilatorio. Tal fuerza es la causa del enlace de las moléculas que contienen dos átomos. La fuerza aumenta rápidamente si tratamos de empujar a un átomo más cerca del otro; su componente

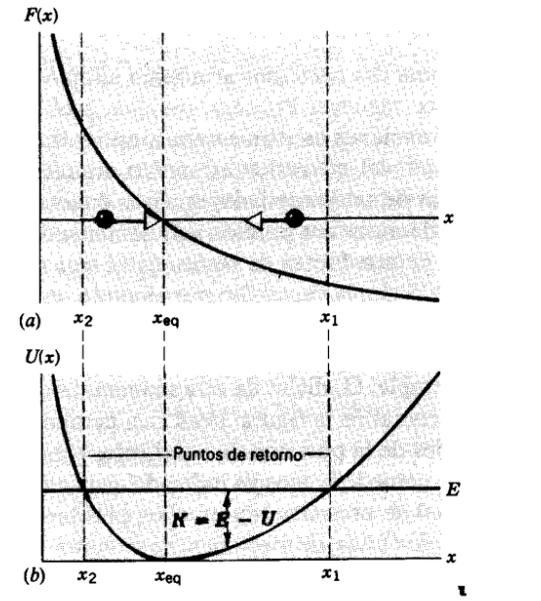


Figura 3 (a) La fuerza que actúa sobre una partícula que oscila entre los límites x_1 y x_2 . Nótese que la fuerza tiende siempre a empujar a la partícula hacia su posición de equilibrio, como en la figura 1. Tal fuerza puede actuar sobre un átomo en una molécula. (b) La energía potencial correspondiente a esta fuerza.

de repulsión impide que la molécula se colapse. Cuando tratamos de jalar a los átomos hacia espaciamientos más grandes, la fuerza trata de oponerse a nuestros intentos; esta fuerza puede ser una fuerza electrostática entre dos cargas eléctricas opuestas, pero a menudo es más compleja e implica la distribución espacial de las órbitas electrónicas de los átomos.

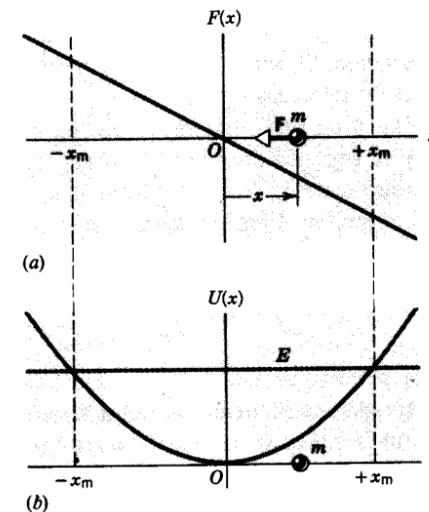


Figura 4 (a) La fuerza y (b) la energía potencial correspondiente de un oscilador armónico simple. Nótese las similitudes y las diferencias con la figura 3.

La figura 3b muestra la función de la energía potencial $U(x)$ correspondiente. Nótese que, como era el caso en la figura 1, la fuerza cambia de signo en la posición de equilibrio, y la energía potencial tiene un mínimo en esa posición. Nótese también que, en este caso, los puntos de cambio (x_1 y x_2 en la Fig. 3) *no* son simétricos respecto a la posición de equilibrio. Si estirásemos la molécula un poco más allá de su configuración de equilibrio y la soltásemos (lo cual ocurre a menudo cuando una molécula absorbe radiación infrarroja), efectuaría un movimiento periódico con respecto a la posición de equilibrio, aunque la descripción matemática sería más compleja que la de la figura 2. El estudio de estas oscilaciones es una técnica importante para el entendimiento de la estructura molecular, lo cual trataremos en la sección 15-10.

15-2 EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

El movimiento de una partícula en un sistema complejo, como el átomo de la molécula en vibración tratado en la sección anterior, es más fácil de analizar si consideramos que el movimiento es una superposición de oscilaciones *armónicas*, las cuales pueden describirse en términos de funciones seno y coseno.

Consideremos un sistema oscilatorio consistente en una partícula sometida a una fuerza

$$F(x) = -kx, \quad (2)$$

donde k es una constante y x es el desplazamiento de la partícula a partir de su posición de equilibrio. Tal sistema oscilatorio recibe el nombre de *oscilador armónico simple*, y su movimiento se llama *movimiento armónico simple*. La energía potencial que corresponde a esta fuerza es

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (3)$$

La fuerza y la energía potencial están, por supuesto, relacionadas por $F(x) = -dU/dx$. Como vimos por la ecuación 2 y como podemos apreciar en la gráfica de la figura 4a, la fuerza que actúa sobre la partícula es directamente proporcional al desplazamiento pero opuesta a él en dirección. La ecuación 3 muestra que la energía potencial varía con el cuadrado del desplazamiento, como lo ilustra la curva parabólica de la figura 4b.

Usted reconocerá las ecuaciones 2 y 3 como las expresiones de la fuerza y de la energía potencial de un resorte "ideal" con constante de fuerza k , comprimido o estirado en una distancia x ; véase la sección 8-3. De aquí que un *cuerpo de masa m unido a un resorte ideal con constante de fuerza k y libre de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción es un ejemplo de un oscilador armónico simple* (véase la Fig. 5). Nótese que existe una posición

* La unidad de frecuencia se llama así en memoria de Heinrich Hertz (1857-1894), cuya investigación proporcionó la confirmación experimental de las ondas electromagnéticas.

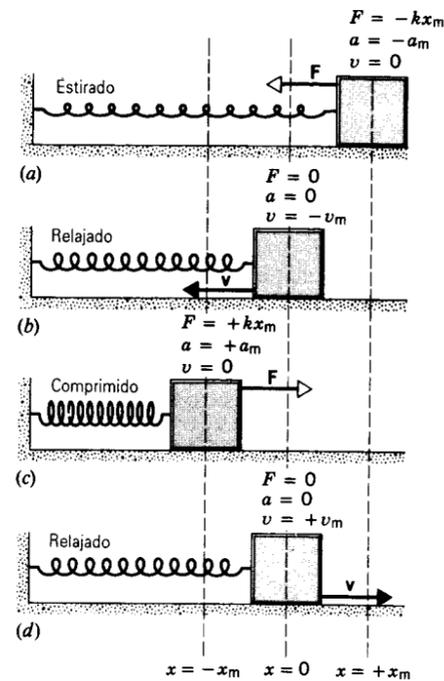


Figura 5 Oscilador armónico simple, consistente en un resorte que actúa sobre un cuerpo que se desliza en una superficie horizontal sin fricción. En (a), el resorte se estira de modo que el cuerpo tenga su desplazamiento máximo a partir del equilibrio. En (c) el resorte está totalmente comprimido. En (b) y (d), el cuerpo pasa por la posición de equilibrio con velocidad máxima y con el resorte relajado.

(la posición de equilibrio; véase la Fig. 5b) en que el resorte no ejerce ninguna fuerza sobre el cuerpo. Si el cuerpo se desplaza hacia la derecha (como en la Fig. 5a), la fuerza ejercida por el resorte sobre el cuerpo apunta hacia la izquierda. Si el cuerpo se desplaza hacia la izquierda (como en la Fig. 5c), la fuerza apunta hacia la derecha. En cada caso la fuerza es una *fuerza de restitución lineal*, esto es, proporcional a la primera potencia de x .)

Apliquemos la segunda ley de Newton, $F = ma$, al movimiento de la figura 5. Sustituimos a F por $-kx$ y en vez de la aceleración a ponemos d^2x/dt^2 ($= dv/dt$). Esto nos da

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (4)$$

La ecuación 4 recibe el nombre de *ecuación del movimiento* del oscilador armónico simple. Su solución, la cual describiremos en la siguiente sección, es una función $x(t)$ que describe la posición del oscilador en función del tiempo, en analogía con la figura 2a, la cual representa la

variación de la posición con el tiempo de un oscilador diferente.

El problema del oscilador armónico simple es importante por dos razones. Primera, muchos problemas que implican vibraciones mecánicas con amplitudes pequeñas se reducen al del oscilador armónico simple, o a una combinación de tales osciladores. Esto equivale a decir que si consideramos una porción suficientemente pequeña de la curva de una fuerza de restitución cerca de la posición de equilibrio, la figura 3a, por ejemplo, resulta arbitrariamente cercana a una línea recta, la cual, como lo muestra la figura 4a, es característica del movimiento armónico simple. O, dicho de otra manera, la curva de la energía potencial de la figura 3b es casi parabólica en las proximidades de la posición de equilibrio.

Segunda, como lo hemos ya indicado, ecuaciones como la ecuación 4 se presentan en muchos problemas físicos de acústica, de óptica, de mecánica, de circuitos eléctricos, e incluso de física atómica. El oscilador armónico simple exhibe características comunes a muchos sistemas físicos.

15-3 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Resolvamos ahora la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Obtuvimos la ecuación 4 para una fuerza $F = -kx$ de un resorte (donde la constante de fuerza k es una medida de la rigidez del resorte) que actúa sobre una partícula de masa m . Veremos más adelante que otros sistemas oscilatorios se rigen por ecuaciones de movimiento similares, en las que la constante k se relaciona con otras características físicas del sistema. Podemos usar el sistema oscilatorio masa-resorte como nuestro prototipo.

La ecuación 4 da una relación entre una función del tiempo $x(t)$ y su segunda derivada con respecto al tiempo, d^2x/dt^2 . Nuestra meta es hallar una función $x(t)$ que satisfaga a esta relación. Comenzaremos por reescribir la ecuación 4 como sigue:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x. \quad (5)$$

La ecuación 5 requiere que $x(t)$ sea una función cuya segunda derivada sea la negativa de la función misma, excepto por un factor constante k/m . Sabemos del cálculo que las funciones seno y coseno tienen esta propiedad. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t$$

$$y \quad \frac{d^2}{dt^2} \cos \omega t = \frac{d}{dt} (-\omega \sin \omega t) = -\omega^2 \cos \omega t.$$

La segunda derivada de un coseno (o de un seno) nos da de nuevo la función original multiplicada por un factor negativo $-\omega^2$. Esta propiedad no sufre alteración si multiplicamos a la función coseno por cualquier constante. Elegimos que la constante sea x_m , de modo que el valor máximo de x (la amplitud del movimiento) será x_m .

Escribamos una solución tentativa de la ecuación 5 como:

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi). \quad (6)$$

Aquí, puesto que

$$x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos \phi \cos \omega t - x_m \sin \phi \sin \omega t \\ = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

permitiéndonos la constante ϕ cualquier combinación de soluciones seno y coseno.

Con las constantes (todavía) desconocidas x_m , ω , y ϕ , hemos escrito una solución de la ecuación 5 en la forma más general posible. Para determinar estas constantes de modo que la ecuación 6 sea realmente la solución de la ecuación 5, diferenciamos a la ecuación 6 dos veces con respecto al tiempo. Tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

y

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Poniendo esto en la ecuación 5, obtenemos

$$-\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m} x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Por lo tanto, si elegimos a la constante ω de modo que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (7)$$

entonces la ecuación 6 es, de hecho, una solución de la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple.

Las constantes x_m y ϕ están todavía indeterminadas y, por lo tanto, son aún completamente arbitrarias. Esto significa que *cualquier* elección de x_m y de ϕ satisfarán a la ecuación 5, de modo que es posible una gran variedad de movimientos del oscilador (todos los cuales tienen la misma ω). Más adelante veremos que x_m y ϕ se determinan para un movimiento armónico en particular por la forma en que se inicie el movimiento.

Veamos el significado físico de la constante ω . Si incrementamos el tiempo t en la ecuación 6 en $2\pi/\omega$, la función resulta

$$x = x_m \cos[\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi] \\ = x_m \cos(\omega t + 2\pi + \phi) \\ = x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Es decir, la función simplemente se vuelve a repetir después de un tiempo $2\pi/\omega$. Por lo tanto, $2\pi/\omega$ es el periodo del movimiento T . Puesto que $\omega^2 = k/m$, tenemos

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (8)$$

De aquí que todos los movimientos dados por la ecuación 5 tengan el mismo periodo de oscilación, el cual se determina solamente por la masa m de la partícula oscilatoria y la constante de fuerza k del resorte. La frecuencia ν del oscilador es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo y está dada por

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (9)$$

De aquí que

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (10)$$

La cantidad ω se denomina *frecuencia angular*; difiere de la frecuencia ν en un factor 2π . Tiene la dimensión del recíproco del tiempo (lo mismo que la velocidad angular), y su unidad es el radián/segundo. En la sección 15-6 ofreceremos un significado geométrico de esta frecuencia angular.

La constante x_m tiene un significado físico sencillo. La función coseno toma valores desde -1 hasta $+1$. El desplazamiento x desde la posición de equilibrio central $x = 0$ tiene por lo tanto un valor máximo de x_m ; véase la ecuación 6. Llamamos a x_m la *amplitud* del movimiento. Como x_m no está determinada por la ecuación 4, son posibles movimientos de varias amplitudes, pero todos tienen la misma frecuencia y periodo. *La frecuencia de un movimiento armónico simple es independiente de la amplitud del movimiento.*

La cantidad $(\omega t + \phi)$ se llama *fase* del movimiento y llamamos a la constante ϕ *constante de fase*. Dos movimientos pueden tener la misma amplitud y frecuencia pero diferir en fase. Si $\phi = -\pi/2 = -90^\circ$, por ejemplo,

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos(\omega t - 90^\circ) \\ = x_m \sin \omega t$$

de modo que el desplazamiento es cero en el tiempo $t = 0$. Por otra parte, si $\phi = 0$, el desplazamiento $x = x_m \cos \omega t$ tiene su valor máximo $x = x_m$ en el tiempo $t = 0$. Otros desplazamientos iniciales corresponden a otras constantes de fase. Véase el problema muestra 3 para un ejemplo del método para hallar a x_m y ϕ a partir del desplazamiento y velocidad iniciales.

La amplitud x_m y la constante de fase ϕ de la oscilación se determinan por la posición y la velocidad iniciales de

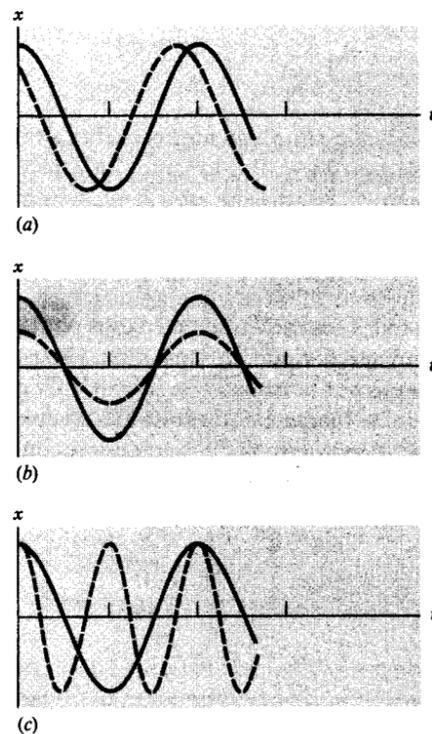


Figura 6 (a) Comparación de los movimientos de dos osciladores armónicos simples de la misma amplitud y frecuencia pero con constantes de fase que difieren en 45° . Si el movimiento está representado por la ecuación 6, entonces la curva de línea continua tiene $\phi = 0^\circ$ y la curva punteada tiene $\phi = 45^\circ$. (b) Dos movimientos armónicos simples con la misma constante de fase y frecuencia pero que difieren en amplitud por un factor de 2. (c) Dos movimientos armónicos simples con la misma amplitud y constante de fase (0°) pero que difieren en frecuencia por un factor de 2. La curva de línea continua tiene el doble del periodo, y por lo tanto la mitad de la frecuencia, de la curva punteada.

la partícula. Estas dos condiciones iniciales determinan a x_m y ϕ exactamente (excepto que ϕ puede ser aumentada o disminuida en un múltiplo cualquiera de 2π sin que cambie el movimiento). Sin embargo, una vez que haya comenzado el movimiento, la partícula continuará oscilando con una amplitud y constante de fase constantes a una frecuencia fija, a no ser que otras fuerzas alteren el sistema.

En la figura 6 trazamos el desplazamiento x contra el tiempo t de varios movimientos armónicos simples descritos por la ecuación 6. Se hacen tres comparaciones; en la figura 6a, las dos curvas tienen la misma amplitud y frecuencia pero difieren en fase en $\phi = \pi/4$, o 45° . En la figura 6b, las dos curvas tienen la misma frecuencia y constante de fase pero difieren en amplitud por un factor de $\frac{1}{2}$, o en periodo por un factor de 2. Conviene estudiar estas curvas cuidadosamente para familiarizarse con la terminología empleada en el movimiento armónico simple.

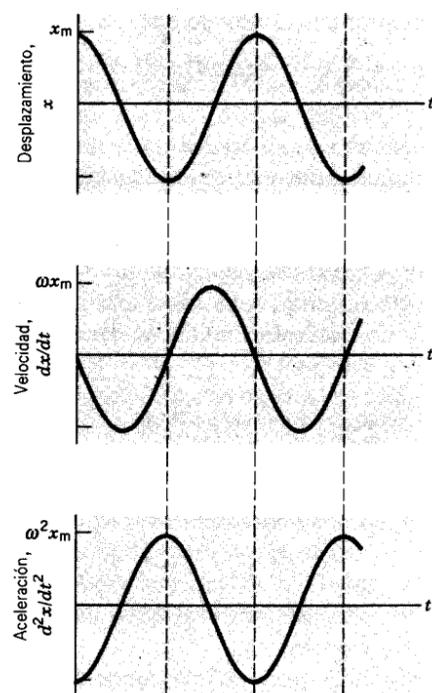


Figura 7 El desplazamiento, la velocidad, y la aceleración de un oscilador armónico simple, según las ecuaciones 11.

Otra característica distintiva del movimiento armónico simple es la relación entre el desplazamiento, la velocidad, y la aceleración de una partícula oscilatoria. Comparemos estas cantidades. En la figura 7 trazamos separadamente el desplazamiento x contra el tiempo t , la velocidad $v = dx/dt$ contra el tiempo t , y la aceleración $a = dv/dt = d^2x/dt^2$ contra el tiempo t . Las ecuaciones de estas curvas son

$$\begin{aligned} x &= x_m \cos(\omega t + \phi), \\ v &= \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi), \\ a &= \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (11)$$

Para el caso graficado hemos tomado $\phi = 0$. Se omiten las unidades y la escala del desplazamiento, la velocidad, y la aceleración para mayor simplificación de la comparación. El desplazamiento, la velocidad, y la aceleración oscilan todas armónicamente. Nótese que el desplazamiento máximo (amplitud) es x_m , la velocidad máxima (amplitud de velocidad) es ωx_m , y la aceleración máxima (amplitud de aceleración) es $\omega^2 x_m$.

Cuando el desplazamiento es un máximo en cualquier dirección, la velocidad es cero porque ésta debe ahora cambiar su dirección. La aceleración en este instante, así como la fuerza de restitución, tiene una magnitud máxima

pero está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento. Cuando el desplazamiento es cero, la velocidad de la partícula es máxima y la aceleración es cero, correspondiendo a una fuerza de restitución nula. La velocidad aumenta cuando la partícula se mueve hacia la posición de equilibrio y luego disminuye cuando se mueve hacia la posición de desplazamiento máximo. Compárese la figura 7 con la figura 2, y obsérvense sus similitudes y diferencias.

Problema muestra 1 Cierta resorte cuelga verticalmente. Cuando se suspende de él un cuerpo de masa $M = 1.65$ kg, su longitud aumenta en 7.33 cm. El resorte se monta luego horizontalmente, y se une a él un bloque de masa $m = 2.43$ kg. El bloque tiene la libertad de deslizarse a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 5. (a) ¿Cuál es la constante k de la fuerza del resorte? (b) ¿Qué fuerza horizontal se requiere para estirar al resorte una distancia de 11.6 cm? (c) Cuando el bloque se desplaza a una distancia de 11.6 cm y luego se suelta, ¿con qué periodo oscilará?

Solución (a) La constante de fuerza k se determina a partir de la fuerza Mg necesaria para estirar el resorte en la distancia medida de 7.33 cm. Cuando el cuerpo suspendido está en equilibrio, la fuerza del resorte kx equilibra al peso Mg :

$$\begin{aligned} kx &= Mg \\ k &= Mg/x = (1.65 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)/(0.0733 \text{ m}) \\ &= 221 \text{ N/m}. \end{aligned}$$

(b) La magnitud de la fuerza necesaria para estirar el resorte en 11.6 cm se determina a partir de la ley de Hooke (Ec. 2) utilizando la constante de fuerza k que obtuvimos en la parte (a):

$$F = kx = (221 \text{ N/m})(0.116 \text{ m}) = 25.6 \text{ N}.$$

(c) El periodo es independiente de la amplitud y depende solamente de los valores de la masa del bloque y de la fuerza constante. Según la ecuación 8,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2.43 \text{ kg}}{221 \text{ N/m}}} = 0.6589 \text{ s} = 659 \text{ ms}.$$

(Mostramos el valor de T con cuatro cifras significativas, más de las justificadas por los datos de entrada, porque necesitaremos este resultado en la solución del problema muestra 3. Para evitar errores de redondeo en etapas intermedias, es una práctica normal considerar un exceso de cifras significativas de esta manera. El resultado final, por supuesto, debe ser redondeado apropiadamente.)

15-4 CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

En el movimiento armónico, incluyendo el movimiento armónico simple, en el cual no actúan fuerzas disipativas,

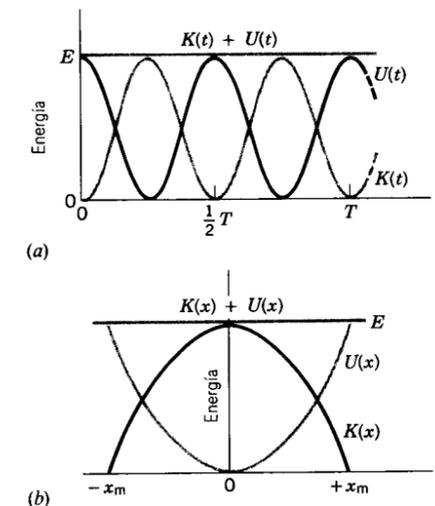


Figura 8 La energía potencial U , la energía cinética K , y la energía mecánica total E de una partícula que efectúa un movimiento armónico simple se muestran en función de (a) el tiempo y (b) el desplazamiento. Nótese que en (a) las energías potencial y cinética pueden alcanzar cada una sus máximos dos veces durante cada periodo del movimiento. Véase también la figura 6 del capítulo 8.

la energía mecánica total $E (= K + U)$ se conserva (permanece constante). Ahora podemos estudiar esto con más detalle en el caso especial del movimiento armónico simple, para el cual el desplazamiento está dado por

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi).$$

La energía potencial U en cualquier instante está dada por

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi). \quad (12)$$

La energía potencial oscila entonces con el tiempo y tiene un valor máximo de $\frac{1}{2}kx_m^2$. Durante el movimiento, la energía potencial varía entre cero y este valor máximo, como lo muestran las curvas de las figuras 8a y 8b.

La energía cinética K en cualquier instante es $\frac{1}{2}mv^2$. Usando la ecuación 11 para $v(t)$ y la ecuación 7 para ω^2 , obtenemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (13)$$

La energía cinética, al igual que la energía potencial, oscila con el tiempo y tiene un valor máximo de $\frac{1}{2}kx_m^2$. Durante el movimiento, la energía cinética varía entre cero y este valor máximo, como lo muestran las curvas en las figuras 8a y 8b. Nótese que las energías cinética y potencial varían con el doble de la frecuencia (mitad del periodo) del desplazamiento y de la velocidad. ¿Puede usted explicar esto?

La energía mecánica total es la suma de la energía cinética y de la energía potencial. Usando las ecuaciones 12 y 13, obtenemos

$$E = K + U = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kx_m^2 \quad (14)$$

Vemos que la energía mecánica total es constante, como lo esperábamos, y tiene el valor $\frac{1}{2}kx_m^2$. En el desplazamiento máximo la energía cinética es cero, pero la energía potencial tiene el valor $\frac{1}{2}kx_m^2$. En la posición de equilibrio la energía potencial es cero, pero la energía cinética tiene el valor $\frac{1}{2}kx_m^2$. En otras posiciones las energías potencial y cinética contribuyen cada una con términos cuya suma es siempre $\frac{1}{2}kx_m^2$. Esta energía total constante E se muestra en las figuras 8a y 8b. La energía total de una partícula que efectúa un movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento. Puede demostrarse (véase el problema 38) que la energía cinética promedio del movimiento durante un periodo es exactamente igual a la energía potencial promedio y que cada una de estas cantidades promedio es la mitad de la energía total, o sea $\frac{1}{4}kx_m^2$.

La ecuación 14 puede escribirse en forma bastante general como:

$$K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \quad (15)$$

A partir de esta relación obtenemos $v^2 = (k/m)(x_m^2 - x^2)$, o sea

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)} \quad (16)$$

Esta relación muestra claramente que la velocidad es un máximo en la posición de equilibrio ($x = 0$) y es cero en los desplazamientos extremos ($x = \pm x_m$). De hecho, podemos partir de la conservación de la energía, ecuación 15 (en la cual $\frac{1}{2}kx_m^2 = E$), y por integración de la ecuación 16 obtener el desplazamiento en función del tiempo. El resultado es idéntico al de la ecuación 6, la cual deducimos de la ecuación del movimiento, ecuación 4. (Véase el problema 32.)

Problema muestra 2 La combinación bloque-resorte del problema muestra 1 se estira en dirección positiva x una distancia de 11.6 cm del equilibrio y luego se suelta. (a) ¿Cuál es la energía total almacenada en el sistema? (b) ¿Cuál es la velocidad máxima del bloque? (c) ¿Cuál es la aceleración máxima? (d) Si el bloque se suelta en $t = 0$, ¿cuáles son su posición, su velocidad, y su aceleración en $t = 0.215$ s?

Solución (a) La amplitud del movimiento está dada por $x_m = 0.116$ m. La energía total está dada por la ecuación 14:

$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}(221 \text{ N/m})(0.116 \text{ m})^2 = 1.49 \text{ J.}$$

(b) La energía cinética máxima es numéricamente igual a la energía total; cuando $U = 0$, $K = K_{\text{máx}} = E$. La velocidad máxima es, entonces,

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2K_{\text{máx}}}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.49 \text{ J})}{2.43 \text{ kg}}} = 1.11 \text{ m/s.}$$

(c) La aceleración máxima ocurre precisamente en el instante en que el bloque se suelta, cuando la fuerza es máxima:

$$a_{\text{máx}} = \frac{F_{\text{máx}}}{m} = \frac{kx_m}{m} = \frac{(221 \text{ N/m})(0.116 \text{ m})}{2.43 \text{ kg}} = 10.6 \text{ m/s}^2.$$

(d) A partir del periodo obtenido en el problema muestra 1, podemos hallar la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.6589 \text{ s}} = 9.536 \text{ radianes/s.}$$

Puesto que el bloque tiene su desplazamiento máximo de $x_m = 0.116$ m en $t = 0$, su movimiento puede describirse por una función coseno:

$$x(t) = x_m \cos \omega t,$$

un resultado que se deduce haciendo $\phi = 0$ en la ecuación 6. En $t = 0.215$ s, hallamos

$$x = (0.116 \text{ m}) \cos (9.536 \text{ radianes/s})(0.215 \text{ s}) = -0.0535 \text{ m.}$$

Nótese que el ángulo ωt , cuyo coseno debemos hallar, se expresa en radianes. La velocidad está dada por la ecuación 11, la cual, con $\phi = 0$, resulta $v(t) = -\omega x_m \sin \omega t$. En 0.215 s, obtenemos

$$v = -(9.536 \text{ radianes/s})(0.116 \text{ m}) \sin (9.536 \text{ radianes/s})(0.215 \text{ s}) = -0.981 \text{ m/s.}$$

Para hallar la aceleración, usamos de nuevo la ecuación 11 y notamos que, para toda t , $a = -\omega^2 x$:

$$a = -(9.536 \text{ radianes/s})^2 (-0.0535 \text{ m}) = +4.87 \text{ m/s}^2.$$

Examinemos nuestros resultados para ver si son razonables. El tiempo $t = 0.215$ s está entre $T/4 = 0.165$ s y $T/2 = 0.330$ s. Si el bloque inicia su movimiento en $x = +0.116$ m, entonces en $T/4$ pasará a través de la posición de equilibrio, y ciertamente es razonable que en $t = 0.215$ s esté en una posición coordinada x negativa, como ya lo habíamos hallado. Puesto que en ese momento se está moviendo hacia $x = -x_m$, su velocidad debe ser negativa, lo cual coincide con lo que hemos obtenido. Sin embargo, ya pasó a través del punto de velocidad más negativa, y se va haciendo más lento al aproximarse a $x = -x_m$; por lo tanto, la aceleración debe ser positiva. Podemos comprobar el valor de la aceleración a partir de $a = kx/m$. Podemos también comprobar el la relación entre v y x usando la ecuación 16.

Problema muestra 3 El bloque del sistema bloque-resorte del problema muestra 1 es desplazado de la posición de equilibrio por una fuerza externa en dirección x positiva. En $t = 0$, cuando el desplazamiento del bloque es $x = +0.0624$ m y su velocidad es $v = +0.847$ m/s, la fuerza externa se quita y el bloque comienza a oscilar. Escriba una ecuación para $x(t)$ durante la oscilación.

Solución Puesto que tenemos la misma masa (2.43 kg) y la misma fuerza constante (221 N/m), la frecuencia angular es todavía 9.536 radianes/s, como lo obtuvimos en el problema muestra 2. La ecuación más general para $x(t)$ está dada por la ecuación 6,

$$x(t) = x_m \cos (\omega t + \phi),$$

y debemos obtener a x_m y a ϕ para completar la solución. Para hallar a x_m , calculemos la energía total, la cual en $t = 0$ tiene términos tanto de cinética como de potencial:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(2.43 \text{ kg})(0.847 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(221 \text{ N/m})(0.0624 \text{ m})^2 = 0.872 \text{ J} + 0.430 \text{ J} = 1.302 \text{ J.}$$

Haciendo esto igual a $\frac{1}{2}kx_m^2$, como lo requiere la ecuación 15, tenemos

$$x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1.302 \text{ J})}{221 \text{ N/m}}} = 0.1085 \text{ m.}$$

Para hallar la constante de fase, usamos la información dada para $t = 0$:

$$x(0) = x_m \cos \phi$$

$$\cos \phi = \frac{x(0)}{x_m} = \frac{+0.0624 \text{ m}}{0.1085 \text{ m}} = +0.5751.$$

En el intervalo de 0 a 2π , existen dos valores de ϕ cuyo coseno es +0.5751; los valores posibles son $\phi = 54.9^\circ$ o $\phi = 305.1^\circ$. Cualquiera de ellos satisfará la condición de que $x(0)$ tenga el valor apropiado, pero sólo uno dará la velocidad inicial correcta:

$$v(0) = -\omega x_m \sin \phi = -(9.536 \text{ rad/s})(0.1085 \text{ m}) \sin \phi = -(1.035 \text{ m/s}) \sin \phi = -0.847 \text{ m/s para } \phi = 54.9^\circ = +0.847 \text{ m/s para } \phi = 305.1^\circ.$$

Obviamente el segundo valor es el correcto, y por lo tanto hacemos que $\phi = 305.1^\circ = 5.33$ radianes. Ahora podemos escribir

$$x(t) = 0.109 \cos (9.54t + 5.33),$$

donde x está en metros y t en segundos.

Véase el problema 31 para una derivación de las relaciones generales que permiten calcular x_m y ϕ a partir de $x(0)$ y $v(0)$.

15-5 APLICACIONES DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Aquí consideraremos unos cuantos sistemas físicos que se mueven con un movimiento armónico simple. A través del texto se hallarán otros.*

El oscilador de torsión

La figura 9 muestra un disco suspendido de un alambre o flecha unido al centro de masa del disco. El alambre está perfectamente fijo a un soporte sólido o abrazadera y al

* Para un estudio completo de 16 sistemas físicos que exhiben un movimiento armónico simple véase "A Repertoire of S.H.M.", por Eli Maor, *The Physics Teacher*, octubre de 1972, pág. 377.

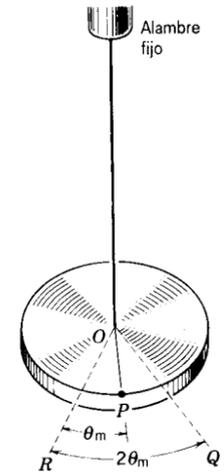


Figura 9 Oscilador de torsión. La línea que va de O a P oscila entre OQ y OR, barriendo un ángulo $2\theta_m$, donde θ_m es la amplitud angular del movimiento.

disco. Con el disco en equilibrio, trazamos una línea radial desde su centro a un punto P en su borde, como se muestra. Si hacemos que el disco gire en un plano horizontal de modo que la línea de referencia OP se mueva a la posición OQ, el alambre se retorcerá. El alambre retorcido ejercerá una torca de restitución sobre el disco que tiende a regresar a la línea de referencia a su posición de equilibrio. Para retorcimientos pequeños se halla que la torca de restitución es proporcional al desplazamiento angular (ley de Hooke), de modo que

$$\tau = -\kappa\theta. \quad (17)$$

Aquí κ (la letra griega kappa) es una constante que depende de las propiedades del alambre y se denomina *constante de torsión*. El signo menos muestra que la torca está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento angular θ . La ecuación 17 es la condición del *movimiento armónico simple angular*.

La ecuación del movimiento para este sistema se basa en la forma angular de la segunda ley de Newton,

$$\tau = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (18)$$

de modo que, usando la ecuación 17, obtenemos

$$-\kappa\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

o sea

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta. \quad (19)$$

Nótese el parecido entre la ecuación 19 para el movimiento armónico simple angular y la ecuación 5 para el movimiento armónico simple lineal. De hecho, las ecuaciones

son matemáticamente idénticas. Al igual que en el capítulo 11, podemos simplemente sustituir al desplazamiento lineal x , por el desplazamiento angular θ a la masa m , por la inercia de rotación I y a la constante de fuerza κ por la constante de torsión k . Mediante estas sustituciones, hallamos que la solución de la ecuación 19 es una oscilación armónica simple en la coordenada angular θ , es decir,

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi). \quad (20)$$

Aquí θ_m es el desplazamiento angular máximo, esto es, la amplitud de la oscilación angular. Nótese que ω significa aquí la frecuencia angular, no la velocidad angular. En la ecuación 20, $\omega \neq d\theta/dt$

En la figura 9 el disco oscila con respecto a la posición de equilibrio $\theta = 0$, siendo el intervalo angular total $2\theta_m$ (desde OQ hasta OR). Por analogía con la ecuación 8, el periodo de la oscilación es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \quad (21)$$

Si κ es conocida y T se mide, puede determinarse la inercia de rotación I con respecto al eje de rotación de cualquier cuerpo rígido oscilatorio. Si I es conocida y T se mide, puede determinarse la constante de torsión κ de cualquier muestra de alambre.

Un oscilador de torsión como el de la figura 9 se denomina también *péndulo de torsión*. La balanza de Cavendish, usada para medir la constante G de la fuerza gravitatoria (véase el capítulo 16), es un péndulo de torsión. Al igual que el péndulo simple (que trataremos a continuación) el péndulo de torsión se usa a menudo para medir el tiempo, siendo el volante de un reloj mecánico un ejemplo común, donde la torca de restitución es proporcionada por un resorte espiral.

El péndulo simple

Un péndulo simple es un cuerpo idealizado que de una partícula suspendida de un cordón ligero inextensible. Cuando se le lleva a un lado de su posición de equilibrio y se le suelta, el péndulo oscila en un plano vertical bajo la influencia de la gravedad. El movimiento es periódico y oscilatorio. Deseamos determinar el periodo del movimiento.

La figura 10 muestra un péndulo de longitud L y masa m de la partícula. En el instante mostrado, el cordón forma un ángulo θ con la vertical. Las fuerzas que actúan sobre m son el peso mg y la tensión T en el cordón. El movimiento tendrá lugar a lo largo de un arco de círculo de radio L , y por lo tanto elegimos a los ejes tangentes al círculo y a lo largo del radio. El peso mg se descompone en una componente radial de magnitud $mg \cos \theta$ y una componente tangencial de magnitud $mg \sin \theta$. Las componentes radiales de las fuerzas suministran la aceleración

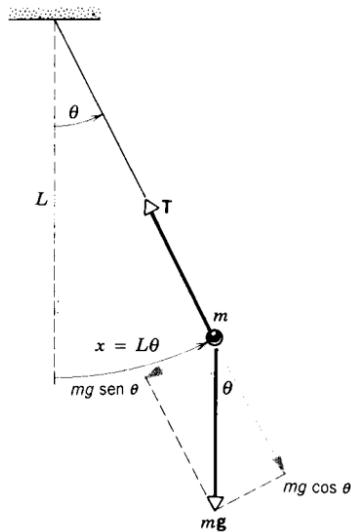


Figura 10 El péndulo simple. Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son la tensión T y la fuerza gravitatoria mg , la cual se descompone en sus componentes radial y tangencial.

centrípeta necesaria para mantener a la partícula moviéndose en un arco circular. La componente tangencial es la fuerza de restitución que actúa sobre m y que tiende a regresarla a la posición de equilibrio. De aquí que la fuerza de restitución sea

$$F = -mg \sin \theta, \quad (22)$$

indicando el signo menos que F es opuesta a la dirección de θ creciente.

Nótese que la fuerza de restitución no es proporcional al desplazamiento angular θ , sino a $\sin \theta$. Por lo tanto, el movimiento resultante no es armónico simple. Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, $\sin \theta$ es aproximadamente igual a θ en radianes. Por ejemplo, si $\theta = 5^\circ (= 0.0873 \text{ rad})$, entonces $\sin \theta = 0.0872$, el cual difiere de θ por sólo alrededor del 0.1%. El desplazamiento a lo largo del arco es $x = L\theta$, y para ángulos pequeños esto es casi un movimiento en línea recta. Por lo tanto, suponiendo que

$$\sin \theta \approx \theta,$$

obtenemos

$$F = -mg\theta = -mg \frac{x}{L} = -\left(\frac{mg}{L}\right)x. \quad (23)$$

Para *desplazamientos pequeños*, la fuerza de restitución es proporcional al desplazamiento y opuesta directamente. Éste es exactamente el criterio del movimiento armónico simple y, de hecho, la ecuación 23 tiene la misma forma que la ecuación 2, $F = -kx$, donde la constante mg/L representa a la constante k . (Compruebe que las dimensiones de k y de mg/L son las mismas.) El periodo de un

péndulo simple cuando su amplitud es pequeña se halla entonces haciendo a $k = mg/L$ en la ecuación 8:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/L}}$$

o sea

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (24)$$

Nótese que el periodo es independiente de la masa de la partícula suspendida.

Cuando la amplitud de la oscilación no es pequeña, puede demostrarse* que la ecuación general del periodo es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \sin^4 \frac{\theta_m}{2} + \dots \right). \quad (25)$$

Aquí θ_m es el desplazamiento angular máximo. Obsérvese que T aumenta cuando la amplitud crece. Los términos sucesivos de la serie infinita se vuelven cada vez más y más pequeños, y el periodo puede calcularse al grado de precisión deseado tomando los suficientes términos. Cuando $\theta_m = 15^\circ$, el periodo real difiere del dado por la ecuación 24 en menos de 0.5%.

Durante los pasados tres siglos, el péndulo ha sido nuestro marcador de tiempo más confiable, sustituido sólo en las últimas décadas por los relojes basados en oscilaciones atómicas o electrónicas. Para que un reloj de péndulo sea un marcador de tiempo preciso, la amplitud de la oscilación debe mantenerse constante a pesar de las pérdidas por fricción que afectan a todos los sistemas mecánicos. Incluso un cambio de amplitud tan pequeño como de 5° a 4° provocaría que el péndulo de un reloj se adelantara en 0.25 minutos por día, cantidad inaceptable incluso para medir el tiempo en el hogar. Para mantener la constante de amplitud en un reloj de péndulo, la energía se suministra automáticamente en pequeños incrementos mediante una pesa o un resorte con la ayuda de un mecanismo de escape que compense las pérdidas por fricción. El reloj de péndulo con escape fue inventado por Christiaan Huygens (1629-1695).

El péndulo simple proporciona también un método conveniente para medir el valor de g , la aceleración debida a la gravedad. Podemos determinar fácilmente a L y a T con una precisión de menos de 0.1% usando el equipo de laboratorio para estudiantes, y entonces la ecuación 24 nos permite determinar a g con esa misma precisión aproximadamente. Con aparatos mejores, ésta puede extenderse hasta alrededor de 0.0001%.

* Véase K. R. Symon, *Mechanics*, 3a. edición (Addison-Wesley, 1971), sección 5.3.

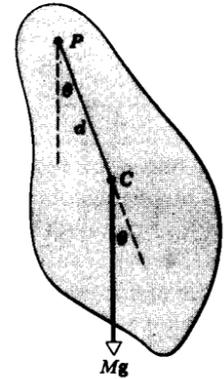


Figura 11 Un péndulo físico. El centro de masa está en C , y el pivote está en el punto P . El péndulo es desplazado un ángulo θ desde su posición de equilibrio, la cual existe cuando C cuelga directamente debajo de P . El peso Mg proporciona la torca de restitución.

El péndulo físico

Cualquier cuerpo rígido montado de manera que pueda oscilar en un plano vertical respecto a algún eje que pase por él recibe el nombre de *péndulo físico*. Ésta es una generalización del péndulo simple, en el cual un cordón sin peso sostiene a una partícula simple. En realidad, los péndulos que utilizamos en la práctica son péndulos físicos.

En la figura 11 un cuerpo de forma irregular está pivotado en torno a un eje horizontal sin fricción que pasa por P y desplazado de la posición de equilibrio en un ángulo θ . La posición de equilibrio es aquella en la que el centro de masa C del cuerpo está verticalmente debajo de P . La distancia desde el pivote al centro de masa es d , la inercia de rotación del cuerpo en torno a un eje que pase por el pivote es I , y la masa del cuerpo es M . La torca de restitución para un desplazamiento angular θ es

$$\tau = -Mgd \sin \theta \quad (26)$$

y se debe a la componente tangencial del peso. Puesto que τ es proporcional a $\sin \theta$, y no a θ , la condición para el movimiento armónico simple angular no se cumple aquí, en lo general. Sin embargo, para desplazamientos angulares pequeños, la relación $\sin \theta \approx \theta$ es, como antes, una aproximación excelente, de modo que para amplitudes pequeñas,

$$\tau = -Mgd\theta. \quad (27)$$

Esta expresión tiene la forma de la ecuación 17, y el periodo se deduce directamente de la ecuación 21 con la sustitución $\kappa = Mgd$, lo cual da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}. \quad (28)$$

De la ecuación 28 puede despejarse la inercia de rotación I , dando

$$I = \frac{T^2 Mgd}{4\pi^2} \quad (29)$$

Las cantidades a la derecha son todas medibles directamente. De aquí que la inercia de rotación en torno a un eje de rotación (que no pase por el centro de masa) de un cuerpo de cualquier forma puede determinarse suspendiendo al cuerpo de ese eje como un péndulo físico.

El péndulo físico incluye al péndulo simple como un caso especial. Al situar al pivote lejos del objeto, usando un cordón sin peso de longitud L , tendríamos $I = ML^2$ y $d = L$, de modo que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{ML^2}{MgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

que es el periodo de un péndulo simple.

Si la masa de un péndulo físico estuviese concentrada a una distancia L del pivote escogida apropiadamente, el péndulo simple resultante tendría el mismo periodo que el péndulo físico original si

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

o sea

$$L = \frac{I}{Md} \quad (30)$$

De aquí que, en lo que concierne a su periodo de oscilación, puede considerarse que la masa de un péndulo físico está concentrada en un punto O cuya distancia al pivote es $L = I/Md$. Este punto se llama *centro de oscilación* del péndulo físico. Obsérvese que, en cualquier cuerpo dado, depende de la ubicación del pivote. Además, si pivotamos al péndulo físico original en torno al punto O , tendrá el mismo periodo que si lo pivotamos en torno al punto P .

Problema muestra 4 Una barra uniforme de masa $M = 0.112$ kg y longitud $L = 0.096$ m está suspendida de un alambre que pasa por su centro y es perpendicular a su longitud. El alambre se retuerce y la barra se pone en oscilación. Se halla que el periodo es de 2.14 s. Cuando se suspende a un cuerpo plano en forma de triángulo equilátero de manera similar a través de su centro de masa, se halla que el periodo es de 5.83 s. Halle la inercia rotatoria del triángulo respecto a este eje.

Solución La inercia rotatoria de una barra, girada respecto a un eje central perpendicular a su longitud, es $ML^2/12$. De aquí que

$$I_{\text{varilla}} = \frac{(0.112 \text{ kg})(0.096 \text{ m})^2}{12} = 8.60 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Según la ecuación 21,

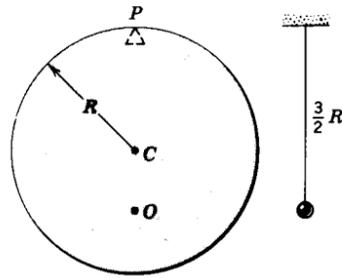


Figura 12 Problema muestra 5. Un disco pivotado en su borde oscila como un péndulo físico. A la derecha se muestra un péndulo simple con el mismo periodo. El punto O es el centro de oscilación.

$$\frac{T_{\text{varilla}}}{T_{\text{triángulo}}} = \left(\frac{I_{\text{varilla}}}{I_{\text{triángulo}}}\right)^{1/2} \quad \text{o} \quad I_{\text{triángulo}} = T_{\text{varilla}}^2 \left(\frac{T_{\text{triángulo}}}{T_{\text{varilla}}}\right)^2$$

de modo que

$$I_{\text{triángulo}} = (8.60 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \left(\frac{5.83 \text{ s}}{2.14 \text{ s}}\right)^2 = 6.38 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

¿Afecta en estos casos la amplitud de cualquier oscilación al periodo?

Problema muestra 5 Un disco uniforme es pivotado en su borde (Fig. 12). Halle su periodo para oscilaciones pequeñas y la longitud del péndulo simple equivalente.

Solución La inercia rotatoria de un disco respecto a un eje que pase por su centro es $\frac{1}{2}MR^2$, donde R es el radio y M es la masa del disco. La inercia rotatoria respecto al pivote en el borde es, usando el teorema de los ejes paralelos,

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

El periodo de este péndulo físico, obtenido a partir de la ecuación 28 con $d = R$, es entonces

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{MR^2}{MgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{R}{g}}$$

independiente de la masa del disco.

El péndulo simple que tiene el mismo periodo tiene una longitud

$$L = \frac{I}{MR} = \frac{3}{2}R$$

o $\frac{3}{4}$ del diámetro del disco. El centro de oscilación del disco pivotado en P está por lo tanto en O , a una distancia $\frac{3}{2}R$ abajo del punto de soporte. ¿Se requiere del péndulo físico equivalente alguna masa en particular?

Si pivotamos al disco en un punto a medio camino entre el borde y el centro, como en O , hallamos que $I = \frac{1}{2}MR^2 + M(\frac{1}{2}R)^2 = \frac{3}{4}MR^2$ y $d = \frac{1}{2}R$. El periodo T es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{4}MR^2}{Mg(R/2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{R}{g}}$$

igual que antes. Esto ilustra la igualdad de los periodos del péndulo físico cuando está pivotado respecto a O y a P .

Si el disco fuera pivotado en el centro, ¿cuál sería su periodo de oscilación?

Problema muestra 6 El centro de oscilación de un péndulo físico tiene otra propiedad interesante. Si una fuerza impulsiva (supuesta horizontal y en el plano de la oscilación) actúa en el centro de oscilación, no se siente ninguna reacción en el punto de soporte. Demuestre esto para una fuerza impulsiva F que actúe hacia la izquierda en el punto O de la figura 12. Suponga que el péndulo está inicialmente en reposo.

Solución Este es un caso de traslación y rotación combinadas respecto al centro de masa (véase la sección 12-6). El efecto de traslación, al actuar aisladamente, ocasiona que P (junto con todo el disco) en la figura 12 se mueva a la izquierda con una aceleración

$$a_{\text{izq}} = F/M$$

El efecto rotatorio, al actuar aisladamente, produciría una aceleración angular en sentido horario respecto a C de

$$\begin{aligned} \alpha &= \tau/I \\ &= (F)(\frac{1}{2}R)/(\frac{1}{2}MR^2) \\ &= F/MR \end{aligned}$$

Debido a esta aceleración angular, P se movería hacia la derecha con una aceleración

$$\begin{aligned} a_{\text{der}} &= \alpha R \\ &= (F/MR)(R) = F/M \end{aligned}$$

Entonces $a_{\text{izq}} = a_{\text{der}}$ y no existe movimiento en el punto P .

Cuando se considera desde este punto de vista el centro de oscilación suele llamarse *centro de percusión*. Los jugadores de béisbol saben que, a no ser que el bate encuentre a la bola justamente en el punto correcto (el centro de percusión), el impacto repercutirá en sus manos. La "repercusión" tiene una dirección diferente que depende de si la bola golpea en un lado o en otro de este punto. El "punto amable" de una raqueta de tenis tiene una explicación similar; al golpear la bola en el "punto amable" se elimina cualquier fuerza de reacción sobre la mano.*

Problema muestra 7 El periodo de un disco de 10.2 cm de radio que efectúa una pequeña oscilación respecto a un pivote en su borde es de 0.784 s. Halle el valor de g , la aceleración debida a la gravedad en ese lugar.

Solución Partiendo del problema muestra 5, tenemos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}}$$

y resolviendo para g , obtenemos que

$$g = \frac{6\pi^2 R}{T^2}$$

* Véase "Physics of the Tennis Racket II: The Sweet Spot", por H. Brody, *American Journal of Physics*, septiembre de 1981, pág. 816.

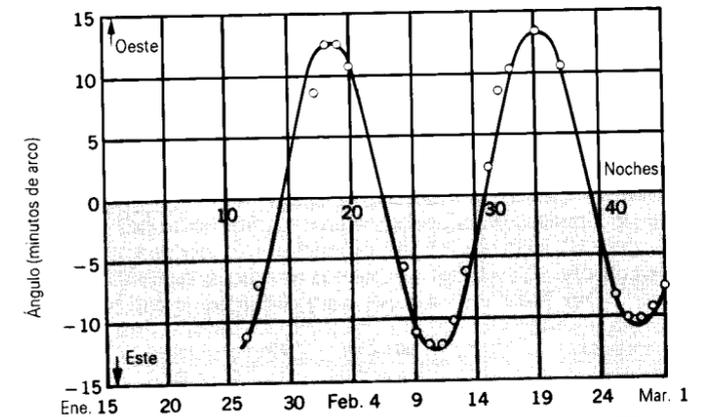


Figura 13 La posición angular en función del tiempo de Calixto, la luna de Júpiter, medida en la Tierra. Los círculos corresponden a las medidas que realizó Galileo en 1610. La curvatura es un óptimo ajuste y sugiere un movimiento armónico simple. Cerca de 400 años después de Galileo, los movimientos de las lunas de Júpiter siguen deleitando a los astrónomos aficionados. Cada mes la revista *Sky and Telescope* publica una carta mostrando sus movimientos en términos de coordenadas angulares que varían sinusoidalmente en forma semejante a esta figura.

Con $T = 0.784$ s y $R = 0.102$ m, hallamos

$$g = \frac{6\pi^2(0.102 \text{ m})}{(0.784 \text{ s})^2} = 9.82 \text{ m/s}^2$$

15-6 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Y MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En 1610, Galileo empleó su telescopio recién construido para observar las lunas de Júpiter. Mientras observaba una noche tras otra, medía la posición de cada luna respecto al planeta. Observó que las lunas viajaban de una parte a otra con un movimiento que nosotros llamaríamos armónico simple. La figura 13 muestra los datos originales de Galileo, trazados en forma de gráfica para mostrar el desplazamiento lateral de una luna (Calisto) en función del tiempo. Es evidente la dependencia sinusoidal característica del movimiento armónico simple.

En realidad, Calisto no oscila de un lado a otro; se mueve en órbita casi circular en torno al planeta, y lo que Galileo observó era un movimiento circular uniforme en un plano visto por su borde. Puesto que esto corresponde exactamente a la relación desplazamiento contra tiempo del movimiento armónico simple, podemos concluir que:

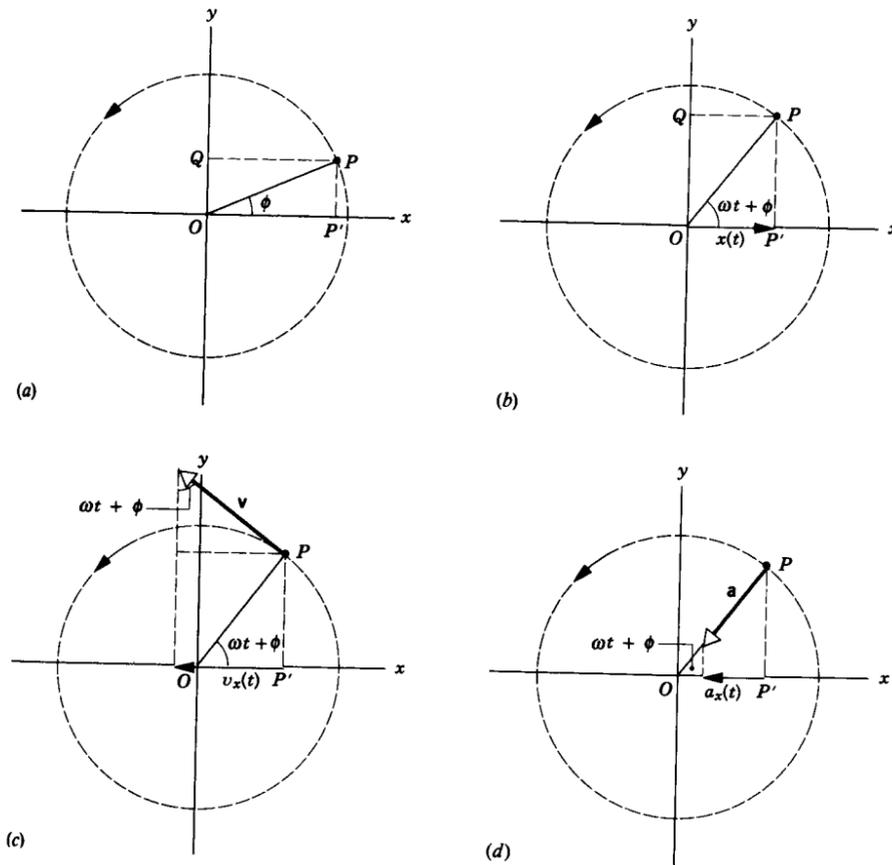


Figura 14 (a) Un punto P se mueve a velocidad constante en un círculo de radio R . La línea de referencia forma un ángulo ϕ con el eje x en $t = 0$. La proyección P' sobre el eje x ejecuta un movimiento armónico simple. (b) Después de un tiempo t , el punto P ha girado en un ángulo adicional ωt . (c) La velocidad de P y de su componente x , que representa a la velocidad de P' en un movimiento armónico simple. (d) La aceleración de P y de su componente x .

El movimiento armónico simple se define como la proyección de un movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro del círculo.

Examinemos con mayor detalle la base matemática de esta conclusión. La figura 14 muestra a una partícula P en movimiento circular uniforme; su velocidad angular es ω y el radio del círculo es R . En el tiempo 0 (Fig. 14a) el radio OP forma un ángulo ϕ con el eje x . En un tiempo t más tarde (Fig. 14b) el radio OP forma un ángulo $\omega t + \phi$ con el eje x , y la proyección de OP a lo largo del eje x (o, lo que es equivalente, la componente x del radiovector que corresponde a OP) es

$$x(t) = R \cos(\omega t + \phi). \quad (31)$$

Esta expresión es, por supuesto, idéntica a la ecuación 6 para el desplazamiento del oscilador armónico simple, correspondiendo x_m a R . Si hacemos que P' represente a la proyección de P sobre el eje x , entonces P' ejecuta un movimiento armónico simple a lo largo del eje x .

En el movimiento circular uniforme, la magnitud de la velocidad tangencial constante es ωR . La figura 14c muestra al vector que representa a la velocidad instantánea v en el tiempo t . La componente x de v , la cual da la velocidad de P' a lo largo de la dirección x , es

$$v_x(t) = -\omega R \sin(\omega t + \phi). \quad (32)$$

En el movimiento circular, la aceleración centrípeta es $\omega^2 R$, y como se muestra en la figura 14d, la componente x de la aceleración de P es

$$a_x(t) = -\omega^2 R \cos(\omega t + \phi). \quad (33)$$

Las ecuaciones 32 y 33 son idénticas a las ecuaciones 11 para el movimiento armónico simple, donde una vez más x_m es reemplazada por R . Así pues, el desplazamiento, la velocidad, y la aceleración son idénticos en el movimiento armónico simple y en la proyección del movimiento circular.

Invertiendo el argumento anterior, podemos establecer que la ecuación 31 para el desplazamiento de un oscilador armónico simple es suficiente para describir a la componente x de un vector cuya punta trace una trayectoria circular con velocidad constante. Si podemos también describir a la componente y , entonces tendremos una descripción completa del vector. Las figuras 14a y 14b muestran a la proyección y OQ en los tiempos 0 y t . La componente y puede expresarse por

$$y(t) = R \sin(\omega t + \phi). \quad (34)$$

Nótese que la proyección del movimiento circular uniforme a lo largo de la dirección y da también el movimiento

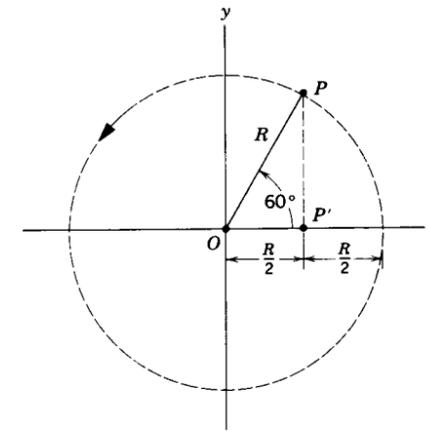


Figura 15 Problema muestra 8. El radio OP se mueve desde $\phi = 0$ en $t = 0$ hasta $\omega t = 60^\circ$ en el tiempo t . La proyección P' se mueve, correspondientemente, desde $x = R$ hasta $x = R/2$.

armónico simple, como lo haría la proyección a lo largo de cualquier dirección. Nótese también que, en todo tiempo t , $x^2 + y^2 = R^2$ como lo esperamos para el movimiento circular. A usted le será posible obtener expresiones para la componente y de la velocidad y de la aceleración y demostrar que, como cabía suponer, $v_x^2 + v_y^2 = (\omega^2 R)^2$ y $a_x^2 + a_y^2 = (\omega^2 R)^2$.

Al usar la identidad trigonométrica $\sin \theta = \cos(\theta - \pi/2)$ podemos reescribir la ecuación 34 como:

$$y(t) = R \cos(\omega t + \phi - \pi/2). \quad (35)$$

Entonces el movimiento circular puede considerarse como la combinación de dos movimientos armónicos simples en ángulo recto, con amplitudes y frecuencias idénticas pero difiriendo en fase en 90° . En la sección próxima veremos cómo pueden analizarse otros movimientos más complicados como combinaciones de movimientos armónicos simples con amplitudes, frecuencias, y fases apropiadamente escogidas.

Problema muestra 8 Consideremos a un cuerpo que efectúa un movimiento armónico simple. La ecuación de ese movimiento es

$$x = 0.35 \cos(8.3t),$$

donde x está en metros y t en segundos. Este movimiento puede representarse también como la proyección de un movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro horizontal. (a) Dé las propiedades del movimiento circular uniforme correspondiente. (b) A partir del movimiento del punto de referencia determine el tiempo requerido para que el cuerpo esté a la mitad del camino hacia el centro de movimiento a partir de su posición inicial.

Solución (a) La componente x del movimiento circular está dada por

$$x = R \cos(\omega t + \phi).$$

Por lo tanto, el círculo de referencia debe tener un radio $R = 0.35$ m, la fase inicial o constante de fase debe ser $\phi = 0$, y la velocidad angular debe ser $\omega = 8.3$ rad/s, con objeto de obtener la ecuación $x = 0.35 \cos(8.3t)$ para la proyección horizontal.

(b) Cuando el cuerpo se mueve a la mitad del camino, el punto de referencia se mueve en un ángulo de $\omega t = \pi/3 = 60^\circ$ (Fig. 15). La velocidad angular es constante e igual a 8.3 rad/s de modo que el tiempo requerido para que se mueva a 60° es

$$t = \frac{60^\circ}{\omega} = \frac{\pi/3 \text{ rad}}{8.3 \text{ rad/s}} = 0.13 \text{ s}.$$

El tiempo puede calcularse también a partir de la ecuación del movimiento. Con

$$x = 0.35 \cos(8.3t) \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}(0.35),$$

obtenemos

$$\frac{1}{2} = \cos(8.3t) \quad \text{o} \quad 8.3t = \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \pi/3 \text{ rad}.$$

Por lo tanto

$$t = \frac{\pi/3 \text{ rad}}{8.3 \text{ rad/s}} = 0.13 \text{ s}.$$

15-7 COMBINACIONES DE MOVIMIENTOS ARMÓNICOS

A menudo se combinan dos movimientos armónicos simples en ángulo recto. El movimiento resultante es la suma de dos oscilaciones independientes. Consideremos primero el caso en que las frecuencias de las vibraciones sean las mismas, de modo que

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi_x) \quad \text{y} \quad y = y_m \cos(\omega t + \phi_y). \quad (36)$$

Los movimientos x y y pueden tener amplitudes diferentes y constantes de fase diferentes.

Si las constantes de fase son las mismas, el movimiento resultante es una línea recta. Esto puede demostrarse analíticamente al considerar la razón entre las expresiones para x y y en la ecuación 36 cuando $\phi_x = \phi_y$, lo cual da

$$y = (y_m/x_m)x.$$

Ésta es la ecuación de una línea recta, cuya pendiente es y_m/x_m . En las figuras 16a y 16b se muestra el movimiento resultante en los dos casos, $y_m/x_m = 1$ y $y_m/x_m = 2$. En estos casos ambos desplazamientos x y y alcanzan un máximo en el mismo tiempo y alcanzan un mínimo en el mismo tiempo. Están *en fase*. El punto P , cuyas coordenadas x y y están dadas por las ecuaciones 36, se mueve de un lado a otro a lo largo de la línea según varíe t .

Si las constantes de fase son diferentes, el movimiento resultante no será una línea recta. Por ejemplo, si las

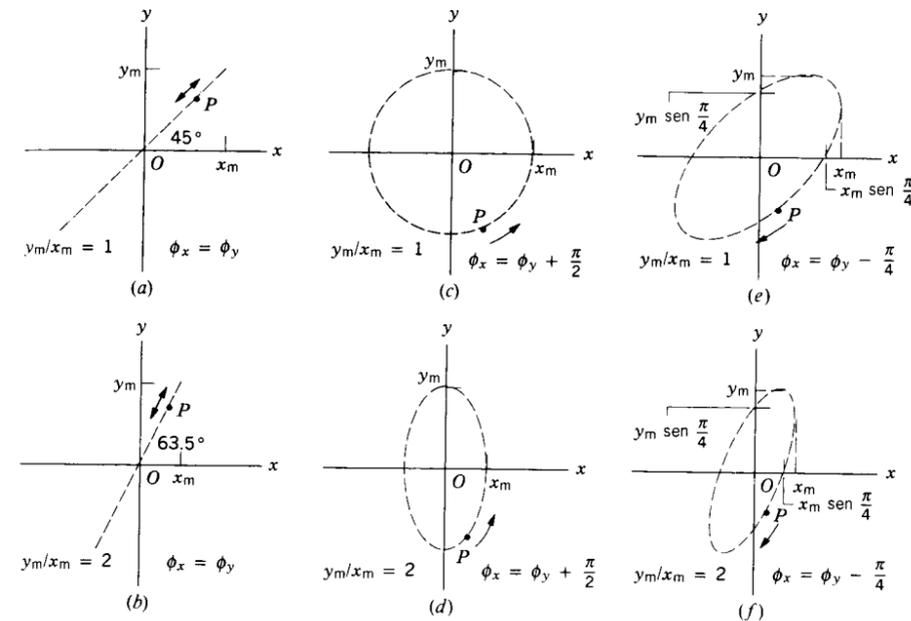


Figura 16 Combinaciones de movimientos armónicos simples a lo largo de dos direcciones perpendiculares. Cada figura muestra el movimiento del punto P cuando las amplitudes y las fases de los movimientos guardan las relaciones indicadas. Los movimientos x y y tienen frecuencias iguales.

constantes de fase difieren en $\pi/2$, el desplazamiento x máximo sucede cuando el desplazamiento y sea cero y *viceversa*. Cuando las amplitudes son iguales el movimiento resultante es circular; cuando las amplitudes son desiguales, el movimiento resultante es elíptico. En las figuras 16c y 16d se muestran dos casos, $y_m/x_m = 1$ y $y_m/x_m = 2$, siendo $\phi_x = \phi_y + \pi/2$. Los casos $y_m/x_m = 1$ y $y_m/x_m = 2$, siendo $\phi_x = \phi_y - \pi/4$ se muestran en las figuras 16e y 16f.

Todas las combinaciones posibles de dos movimientos armónicos simples en ángulo recto que tengan la misma frecuencia corresponden a trayectorias elípticas, siendo el círculo y la línea recta casos especiales de una elipse. Esto puede demostrarse analíticamente al combinar las ecuaciones 36 y eliminar al tiempo t ; usted puede demostrar que la ecuación resultante es la de una elipse. La forma de la elipse depende solamente de la razón entre las amplitudes, y_m/x_m , y de la diferencia de fase entre las dos oscilaciones, $\phi_x - \phi_y$. El movimiento real puede ser bien en sentido horario o bien en sentido antihorario, dependiendo de qué componente se adelante en fase.

Si dos oscilaciones de *frecuencias diferentes* se combinan en ángulo recto, el movimiento resultante es más complicado. El movimiento no es ni siquiera periódico a no ser que las dos frecuencias componentes ω_x y ω_y sean la razón de dos enteros (véase el problema 61). El análisis matemático de tales movimientos suele ser difícil, pero los patrones pueden exponerse gráficamente en la pantalla de un osciloscopio, en la que un haz de electrones puede ser desviado simultáneamente en las direcciones vertical y horizontal por señales electrónicas sinusoidales cuyas frecuencias, amplitudes, y fase relativa pueden variar. La figura 17 es un ejemplo de los patrones complejos y bellos que resultan.

En esta sección hemos considerado solamente combinaciones de movimientos armónicos simples en diferentes direcciones (en ángulo recto entre sí). Las combinaciones de movimientos armónicos simples en la *misma dirección*, con la misma frecuencia pero con amplitudes y fases diferentes, son de interés especial en el estudio de la difracción y la interferencia de la luz, el sonido, y la radiación electromagnética, todo lo cual se estudiará más adelante en el texto. También pueden ser combinadas oscilaciones de frecuencias diferentes en la misma dirección. El tratamiento de este movimiento es particularmente importante en el caso de las vibraciones sonoras que se estudiarán en el capítulo 20.

15-8 MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO (Opcional)

Hasta este momento hemos supuesto que no actúan fuerzas de fricción sobre el oscilador. Si esta hipótesis se mantuviese estrictamente, un péndulo o una masa unida a un resorte oscilarían de manera indefinida. En realidad, la amplitud de la oscilación disminuye en forma gradual hasta cero como resultado de la fricción. Se dice que el movimiento está *amortiguado* por la fricción y se le llama *movimiento armónico amortiguado*. A menudo la fricción surge de la resistencia del aire o de fuerzas internas. En la mayoría de los casos de interés la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad del cuerpo pero directamente opuesta a él. En la figura 18 se muestra un ejemplo de un oscilador amortiguado.

La fuerza neta sobre el cuerpo oscilatorio es la suma de la fuerza de restitución $-kx$ y la fuerza de amortiguamiento, la cual suponemos tiene la forma de $-bv$ como en el caso de la fuerza de arranque que se consideró en la sección 6-7. Aquí b es una constante positiva, que depende de las propiedades del fluido, como la densidad, y de la forma y dimensiones del objeto

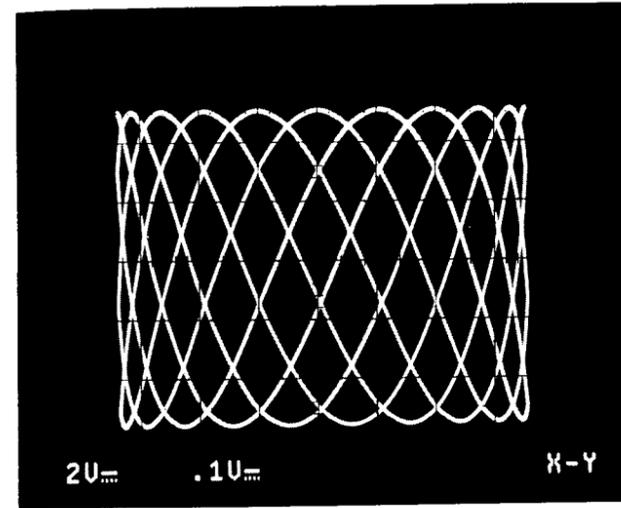


Figura 17 Una figura Lissajous, producida en la pantalla de un osciloscopio cuando las desviaciones horizontal y vertical son señales sinusoidales cuyas frecuencias tienen razones enteras. En el caso que se muestra, la razón de las frecuencias es de 1/20.

sumergido. Partiendo de la segunda ley de Newton en la forma $\Sigma F = ma$, obtenemos

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (37)$$

Una solución de esta ecuación (ofrecida aquí sin prueba; véase el problema 63 para su verificación)* es

$$x = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi), \quad (38)$$

donde

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (39)$$

Esta forma de solución de la ecuación 37 es válida para constantes b de amortiguamiento que sean lo suficientemente pequeñas de modo que la cantidad en el radical de la ecuación 39 sea positiva. En la figura 19 se traza el desplazamiento x en función del tiempo t en este caso.

Existen dos características notables de esta solución. Primeramente, la frecuencia es más pequeña (y el periodo más largo) cuando está presente la fricción. La fricción retarda al movimiento, como cabe esperar. Si no hubiese fricción presente, b sería igual a cero y ω' sería igual a $\sqrt{k/m}$, que es la frecuencia angular ω de un movimiento no amortiguado. Cuando la fricción está presente, ω' es ligeramente menor que ω , como lo muestra la ecuación 39. En el caso mostrado en la figura 19, que

* Para un estudio más completo de la derivación e interpretación de las ecuaciones del oscilador amortiguado, véase K. R. Symon, *Mechanics*, 3a. edición (Addison-Wesley, 1971), sección 2.9.

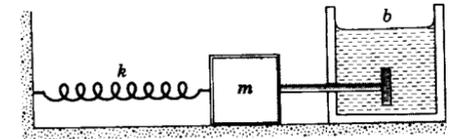


Figura 18 Representación de un oscilador armónico amortiguado. Consideramos que el cuerpo oscilatorio (de masa m) está unido a una tablilla sin masa sumergida en un fluido, donde experimenta una fuerza de amortiguamiento viscoso $-bv$. No consideramos, en cambio, la fricción por deslizamiento en la superficie horizontal.

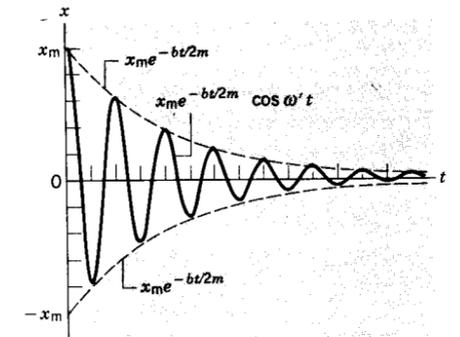


Figura 19 Movimiento armónico amortiguado. El desplazamiento x se grafica contra el tiempo t considerando que la constante de fase ϕ sea 0. El movimiento es oscilatorio, pero la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo.

representa un fuerte amortiguamiento en el que la amplitud disminuye según un factor de 10 en 5 ciclos, ω' difiere de ω en 0.3% solamente.

En segundo lugar, la amplitud del movimiento, representada en la ecuación 38 por el factor $x_m e^{-bt/2m}$ y en la figura 19 por las curvas de puntos, disminuye exponencialmente hasta cero. El intervalo de tiempo τ durante el cual la amplitud cae a $1/e$ de su valor inicial se llama *vida media* de la oscilación. El factor exponencial en la ecuación 38 tendrá el valor e^{-1} cuando $t = \tau = 2m/b$. Una vez más, si no hubiese fricción presente, b sería igual a cero y la amplitud tendría el valor constante x_m al pasar el tiempo; la vida media sería infinita.

Las ecuaciones 38 y 39 sólo son válidas para $b \leq 2\sqrt{km}$. Si b tiene su mayor valor posible en este intervalo ($b = 2\sqrt{km}$), entonces $\omega' = 0$, y el desplazamiento tiende a cero exponencialmente sin oscilación. La vida media τ tiene su valor más pequeño, el cual puede demostrarse que es igual a ω^{-1} , o sea, el inverso de la frecuencia angular de la oscilación no amortiguada. Esta condición, llamada *amortiguamiento crítico*, es a menudo la meta de los ingenieros mecánicos al diseñar un sistema en el que las oscilaciones desaparezcan en el menor tiempo posible.

En el movimiento armónico amortiguado la energía del oscilador se disipa gradualmente debido a la fricción y cae a cero con el tiempo. En el caso de un amortiguamiento pequeño, cuando la ecuación 38 es válida, podemos aproximar el valor instantáneo de la energía mediante la ecuación 14, reemplazando

do la amplitud x_m (constante) por el valor instantáneo de la amplitud, $x_m e^{-bt/2m}$. Entonces

$$E(t) = \frac{1}{2}k(x_m e^{-bt/2m})^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m} \quad (40)$$

Problema muestra 9 En un oscilador amortiguado, como el de la figura 18, sea $m = 250$ g, $k = 85$ N/m, y $b = 0.070$ kg/s. ¿En cuántos periodos de oscilación sería la energía mecánica del oscilador igual a la mitad de su valor inicial?

Solución Para un amortiguamiento pequeño, $\omega' \approx \omega$ y el periodo es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.25 \text{ kg}}{85 \text{ N/m}}} = 0.34 \text{ s.}$$

En $t = 0$, la energía mecánica inicial es $\frac{1}{2}kx_m^2$. De la ecuación 40, la energía tendrá la mitad de este valor en un tiempo t determinado a partir de

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}kx_m^2) = \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}$$

Despejando a t , obtenemos

$$t = \frac{m \ln 2}{b} = \frac{(0.25 \text{ kg})(\ln 2)}{0.070 \text{ kg/s}} = 2.5 \text{ s.}$$

El tiempo t es alrededor de $7.5T$; entonces se requieren alrededor de 7.5 ciclos de oscilación para que la energía mecánica adquiera la mitad de su valor inicial.

La energía total debe conservarse, por supuesto. ¿A dónde va esta energía? ■

15-9 OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA (Opcional)

Hasta ahora hemos discutido solamente las oscilaciones naturales de un cuerpo, es decir, las oscilaciones que ocurren, por ejemplo, cuando el cuerpo es desplazado y luego liberado. Para una masa unida a un resorte la frecuencia natural es

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

en ausencia de fricción y

$$\omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

en presencia de una pequeña fuerza de fricción bv .

Sin embargo, surge una situación diferente cuando el cuerpo se halla sometido a una fuerza externa sinusoidal. Como ejemplos, un puente vibra bajo la influencia de una marcha de soldados; el cárter de un motor vibra por los impulsos periódicos de una irregularidad en la flecha, y nuestro tímpano vibra cuando se exponen a la fuerza periódica de una onda sonora. Las oscilaciones resultantes se llaman oscilaciones forzadas. Estas oscilaciones forzadas tienen la frecuencia de la fuerza externa y no la frecuencia natural del cuerpo. Sin embargo, la respuesta del cuerpo depende de la relación entre las frecuencias forzada y natural. Una sucesión de pequeños impulsos aplicados con la frecuencia apropiada pueden producir una oscilación de

gran amplitud. Un niño subido en un columpio aprende a balancearse a intervalos de tiempo apropiados para hacer que el columpio se mueva con una gran amplitud. El problema de las oscilaciones forzadas es muy general. Su solución es útil en sistemas acústicos, en circuitos de corriente alterna, y en la física atómica, así como también en la mecánica.

La ecuación del movimiento de un oscilador forzado se deduce de la segunda ley del movimiento. Además de la fuerza de restitución $-kx$ y de la fuerza de amortiguamiento $-bv$, tenemos también la fuerza externa oscilante aplicada. Para simplificar, hagamos que esta fuerza externa esté dada por $F_m \cos \omega''t$. Aquí F_m es el valor máximo de la fuerza externa y $\omega'' (= 2\pi\nu'')$ es su frecuencia angular. Podemos imaginar a tal fuerza aplicada directamente a la masa oscilatoria de la figura 18, por ejemplo, reemplazando el muro fijo de la izquierda con un apoyo móvil unido a la flecha de un motor. El motor mueve el apoyo con la frecuencia angular ω'' .

Partiendo de la segunda ley de Newton, obtenemos

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega''t = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega''t. \quad (41)$$

La solución a esta ecuación (que damos sin demostración)* es

$$x = \frac{F_m}{G} \sin(\omega''t - \phi), \quad (42)$$

donde

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2}, \quad (43)$$

y

$$\phi = \cos^{-1} \frac{b\omega''}{G}. \quad (44)$$

Consideremos al movimiento resultante de manera cualitativa.

Nótese (Ec. 42) que el sistema vibra con la frecuencia angular ω'' de la fuerza motriz, en lugar de vibrar con su frecuencia natural ω , y que la amplitud del movimiento es constante. Hay amortiguamiento, el cual causaría normalmente una disminución en la amplitud, pero la fuente de la fuerza motriz proporciona la energía necesaria para mantener constante la amplitud. En efecto, el oscilador transporta energía de la fuente motriz al medio de amortiguamiento, donde la energía se disipa.

El caso más sencillo es aquel en el cual no existe amortiguamiento, lo que significa que $b = 0$ en la ecuación 43. El factor G , que tiene el valor $|m(\omega''^2 - \omega^2)|$ para $b = 0$, es grande cuando la frecuencia angular ω'' de la fuerza motriz es muy diferente de la frecuencia angular natural no amortiguada ω del sistema. Esto significa que la amplitud del movimiento resultante, F_m/G , es pequeña. Al aproximarse la frecuencia motriz a la frecuencia natural, es decir, cuando $\omega'' \rightarrow \omega$, vemos que $G \rightarrow 0$ y la amplitud $F_m/G \rightarrow \infty$. En realidad, siempre hay algún amortiguamiento de modo que la amplitud de la oscilación, aunque pudiera llegar a ser grande, permanece finita en la práctica.

* Véase K. R. Symon, *Mechanics*, 3a. edición (Addison-Wesley, 1971), sección 2.10. La ecuación 42 es una solución de estado estacionario que se presenta después de que ha transcurrido algún tiempo. Cuando el movimiento comienza, es una superposición de esta solución y de los términos transitorios de vida corta que decaen rápidamente. Examinamos el movimiento después de que estos términos se vuelven despreciables.

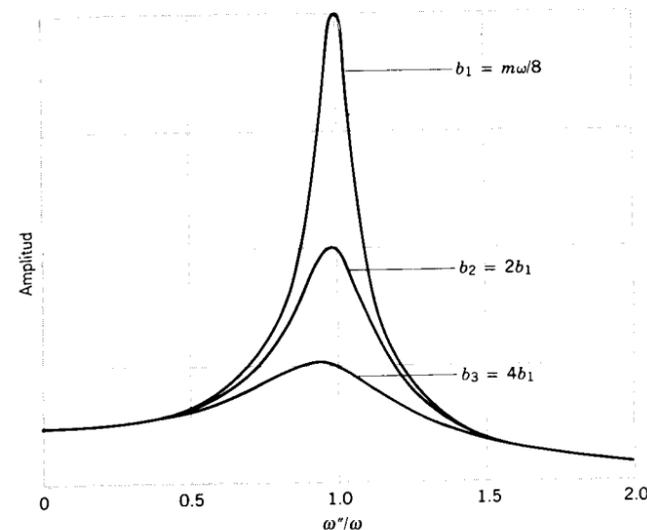


Figura 20 La amplitud F_m/G de un oscilador forzado cuando varía la frecuencia angular ω'' de la fuerza motriz. Las tres curvas corresponden a niveles de amortiguamiento diferentes, correspondiendo al amortiguamiento más pequeño la curva de resonancia de mayor pico.

En osciladores amortiguados (para los cuales $b \neq 0$ en la ecuación 43), existe un valor característico de la frecuencia motriz ω'' para el cual la amplitud de oscilación es un máximo. Esta condición se llama *resonancia* y el valor de ω'' en el que ocurre la resonancia se llama *frecuencia angular resonante*. (La resonancia, que aquí se define como la que ocurre a la frecuencia a la cual las oscilaciones forzadas tienen su amplitud máxima, puede definirse de otras formas como, por ejemplo, la frecuencia a la cual se transfiere la máxima potencia de la unidad motriz al sistema oscilatorio o a la cual la velocidad de la masa oscilatoria es máxima. Las definiciones no son equivalentes; estudiaremos este tema más a fondo cuando tratemos con oscilaciones eléctricas forzadas; véase el problema 68.) Cuanto más pequeño sea el amortiguamiento en un sistema, más cercana se halla la frecuencia angular resonante a la frecuencia angular natural no amortiguada ω . A menudo, el amortiguamiento es lo suficientemente pequeño como para que la frecuencia angular resonante pueda considerarse como igual a la frecuencia angular natural no amortiguada ω con un error pequeño.

En la figura 20 hemos trazado tres curvas que dan la amplitud de las vibraciones forzadas en función de la razón de la frecuencia motriz ω'' a la frecuencia angular natural no amortiguada ω .



Figura 21 El puente del estrecho de Tacoma en Puget Sound, Washington (EU). Terminado y abierto al tránsito en julio de 1940, de inmediato mostró oscilaciones de balanceo suaves debidas a la resonancia. Más tarde, el puente desarrolló violentas oscilaciones torsionantes que pueden apreciarse en la figura de la izquierda. Finalmente el claro principal se rompió, haciendo que la losa del puente se cayera al agua, como se muestra en la figura de la derecha.

Cada una de las curvas corresponde a un valor diferente de la constante de amortiguamiento b . Cuando el amortiguamiento es pequeño, la curva de resonancia es aguda y la amplitud alcanza un máximo cuando $\omega'' = \omega$. Al aumentar el amortiguamiento, la curva de resonancia se vuelve más pequeña y más ancha, y la resonancia se desplaza ligeramente de $\omega'' = \omega$.

Todas las estructuras mecánicas, como edificios, puentes, y aeroplanos, tienen una o más frecuencias resonantes naturales. Puede resultar desastroso someter una estructura a una fuerza impulsora externa a una de esas frecuencias. La imagen de la soprano que puede quebrar con su voz una copa de vino es un ejemplo del resultado.

Otro ejemplo de resonancia ocurrió en el puente sobre el estrecho de Tacoma en el estado de Washington (EUA) en 1940. El viento que soplabla en el estrecho de Tacoma se dividió en torbellinos, suministrando así golpes de viento que sacudieron al puente con una frecuencia que igualó a una de sus frecuencias de vibración naturales. El resultado fue un suave movimiento de balanceo vertical, parecido a una montaña rusa, que le valió al puente el sobrenombre de "Galloping Gertie" (Gertrudis galopante). Unos cinco meses después de haberse inaugurado el puente, el suave balanceo oscilatorio se convirtió en violentas oscilaciones torsionantes, que no tardaron en provocar el colapso del puente (Fig. 21). Estas oscilaciones no fueron consecuencia de la resonancia sino de los efectos no lineales debidos a ráfagas de viento particularmente fuertes. Estos efectos complejos no pueden ser analizados en función del oscilador lineal forzado que hemos estudiado aquí. ■

15-10 OSCILACIONES DE DOS CUERPOS (Opcional)

A nivel microscópico (moléculas, átomos, núcleos), existen muchos ejemplos de oscilaciones que, de manera aproximada, son armónicas simples. Un ejemplo es la molécula diatómica, en la cual dos átomos están unidos entre sí con una fuerza de la forma ilustrada en la figura 3. Cerca de la posición de equilibrio, la energía potencial puede ser aproximada por una parábola de la forma $U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$, y si se la desplaza a una pequeña distancia de x_{eq} , la molécula oscilará respecto a la posición de equilibrio. Para nuestros propósitos, podemos imaginar que la molécula está representada por dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por un resorte de constante de fuerza k , como se muestra en la figura 22. En esta sección examinaremos el movimiento de este sistema.

Una manera de describir el movimiento del sistema es en función de los movimientos separados de las dos partículas, que se localizan en relación al origen O por las dos coordenadas x_1 y x_2 , como se muestra en la figura 22a. Como veremos ensegui-

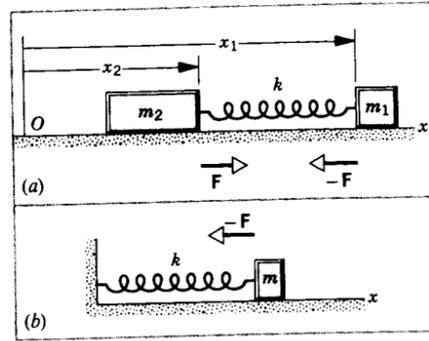


Figura 22 (a) Dos cuerpos oscilatorios de masas m_1 y m_2 unidos por un resorte. (b) El movimiento relativo puede ser representado por la oscilación de un solo cuerpo que tenga la masa reducida m .

da, esto conduce a una descripción diferente y a menudo más útil, que está dada en función de la separación y de la velocidad *relativas* de las dos partículas. En efecto, reemplacemos a las dos coordenadas x_1 y x_2 por dos coordenadas diferentes: la separación relativa $x_1 - x_2$ y la localización x_m del centro de masa. En ausencia de fuerzas externas, y su movimiento no es de interés real para el estudio de la oscilación del sistema, de modo que podemos analizar al sistema en función de la coordenada relativa únicamente.

La separación relativa $x_1 - x_2$ da la longitud del resorte en cualquier momento. Supongamos que su longitud sin estirar sea L ; entonces $x = (x_1 - x_2) - L$ es el cambio de longitud del resorte, y $F = kx$ es la magnitud de la fuerza ejercida sobre *cada partícula* por el resorte. Como se muestra en la figura 22a, si el resorte ejerce una fuerza $-F$ sobre m_1 , entonces ejerce una fuerza $+F$ sobre m_2 .

Aplicamos la segunda ley de Newton separadamente a las dos partículas, considerando los componentes de la fuerza a lo largo del eje x :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx,$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = +kx.$$

Ahora, multiplicamos la primera de estas ecuaciones por m_2 y la segunda por m_1 , y luego las restamos. El resultado es

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -m_2 kx - m_1 kx,$$

la cual podemos escribir así:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -kx. \quad (45)$$

La cantidad $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ tiene la dimensión de una masa y se conoce como *masa reducida* m :

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (46)$$

Ya que la longitud de relajamiento L del resorte es una constante, las derivadas de $(x_1 - x_2)$ son las mismas que las derivadas de x :

$$\frac{d}{dt} (x_1 - x_2) = \frac{d}{dt} (x + L) = \frac{dx}{dt},$$

y así la ecuación 45 se convierte en

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0.$$

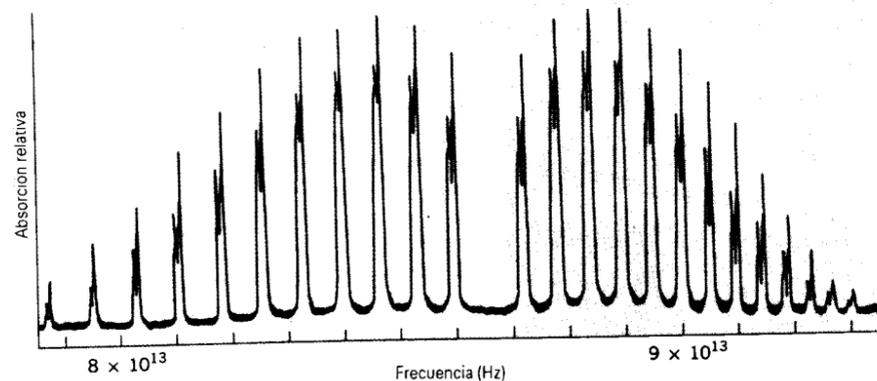
Ésta es idéntica en forma a la ecuación 4 para la masa oscilatoria aislada, demostrando entonces que, desde el punto de vista de las oscilaciones, el sistema de la figura 22a puede ser reemplazado por una sola partícula, como se representa en la figura 22b, con una masa igual a la masa reducida del sistema. En particular, la frecuencia de oscilación del sistema de la figura 22 está dada por la ecuación 9, usando la masa reducida.

Si deseamos examinar el movimiento detallado del sistema, podemos escribir simplemente la solución para $x(t)$, $v(t)$, y $a(t)$, dada por las ecuaciones 11, teniendo en cuenta que x representa la coordenada relativa de las dos partículas y, por lo tanto, v y a representan su velocidad *relativa* $v_1 - v_2$ y su aceleración *relativa* $a_1 - a_2$, respectivamente.

Nótese que la masa reducida m es siempre más pequeña que cualquiera de las otras masas. Si una de las masas es mucho más pequeña que la otra, entonces m es aproximadamente igual a la masa más pequeña. Si las masas son iguales, entonces m es igual a la mitad del tamaño de cualquiera de las masas.

Problema muestra 10 El cloro natural consta de dos isótopos: ^{35}Cl , con 76% de abundancia relativa y masa atómica de

Figura 23 El espectro de absorción de la radiación infrarroja por el HCl molecular. Cada pico corresponde a un cambio en el movimiento vibratorio de las moléculas. Los pares de picos con espaciamiento pequeño se deben a los dos isótopos del Cl.



34.968853 u, y ^{37}Cl , con 24% de abundancia relativa y masa atómica de 36.965903 u. (a) ¿Cuál es la masa reducida de una molécula de HCl cuando contiene ^{35}Cl y cuando contiene ^{37}Cl ? (b) La frecuencia vibratoria de una molécula de HCl es 8.5×10^{13} Hz. Suponiendo que el HCl se comporta como un oscilador simple de dos cuerpos, halle la constante k de la fuerza efectiva.

Solución (a) La masa reducida del H^{35}Cl se obtiene a partir de la ecuación 46, usando la masa H de 1.007825 u:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1.007825 \text{ u})(34.968853 \text{ u})}{1.007825 \text{ u} + 34.968853 \text{ u}} = 0.979593 \text{ u}.$$

Para el H^{37}Cl tenemos similarmente

$$m = \frac{(1.007825 \text{ u})(36.965903 \text{ u})}{1.007825 \text{ u} + 36.965903 \text{ u}} = 0.981077 \text{ u}.$$

(b) Resolviendo la ecuación 9 para la constante de fuerza, obtenemos

$$k = 4\pi^2 \nu^2 m = 4\pi^2 (8.5 \times 10^{13} \text{ Hz})^2 (0.98 \text{ u})(1.66 \times 10^{-27} \text{ kg/u}) = 464 \text{ N/m}.$$

Esto es del mismo orden de magnitud que la constante de fuerza de resortes ordinarios (por ejemplo, véase el problema muestra 1). ¿Puede usted explicar cómo puede ser la constante de fuerza de una molécula la misma que la de un resorte?

Las moléculas pueden absorber o emitir radiación electromagnética y cambiar su estado de movimiento vibratorio en el proceso. De hecho, la observación de la radiación que es absorbida o emitida es una de las maneras que tenemos de aprender acerca de la estructura de las moléculas. La figura 23 muestra un ejemplo del espectro de absorción infrarroja del HCl. Cada pico corresponde a un cambio en el estado vibratorio del HCl cuando absorbe radiación a esa frecuencia. Las dos componentes en cada pico se deben a los dos isótopos del Cl; sus masas diferentes resultan en masas reducidas ligeramente diferentes para las moléculas del H^{35}Cl y del H^{37}Cl , como lo hemos hallado en la parte (a), y por lo tanto en frecuencias vibratorias ligeramente diferentes. ■

PREGUNTAS

- Dé algunos ejemplos de movimientos que sean aproximadamente armónicos simples. ¿Por qué son raros los movimientos que sean armónicos simples exactamente?
- El resorte de una puerta mosquitera típica está esforzado a la tensión en su estado normal; esto es, las vueltas adyacentes se adhieren entre sí y ofrecen resistencia a ser separadas. ¿Obedece tal resorte a la ley de Hooke?
- ¿Es obedecida la ley de Hooke, siquiera aproximadamente, por la plataforma de salto en una alberca? ¿Y por un trampolín? ¿Y por un resorte enrollado hecho de alambre de plomo?
- ¿Qué le pasaría al movimiento de un sistema oscilatorio si cambiara el signo del término de la fuerza, $-kx$ en la ecuación 2?
- Un resorte tiene una constante de fuerza k , y de él está suspendido un objeto de masa m . El resorte se corta a la mitad y el mismo objeto se suspende de una de las mitades. ¿Cómo se relacionan las frecuencias de oscilación antes y después de haber cortado el resorte?
- Un resorte no estirado tiene una constante de fuerza k . Es estirado por una pesa colgada de él hasta una longitud de equilibrio dentro del límite elástico. ¿Tiene el resorte la misma constante de fuerza k para desplazamientos a partir de esta nueva posición de equilibrio?
- Supongamos que tenemos un bloque de masa desconocida y un resorte de constante de fuerza también desconocida. Muestre cómo podemos predecir el periodo de oscilación de este sistema bloque-resorte simplemente midiendo la extensión del resorte producida al unir el bloque a él.
- Todo resorte real tiene masa. Si esta masa es tenida en cuenta, explique cualitativamente cómo afectará esto al periodo de oscilación de un sistema resorte-bloque.
- ¿Puede existir un oscilador que, aun para pequeñas amplitudes, no sea armónico simple? Es decir, ¿podemos tener una fuerza de restitución no lineal en un oscilador incluso a amplitudes arbitrariamente pequeñas?
- ¿Cómo resultan afectadas cada una de las siguientes propiedades de un oscilador armónico simple al duplicar la amplitud: el periodo, la constante de fuerza, la energía mecánica total, la velocidad máxima y la aceleración máxima?
- ¿Qué cambios haría usted en un oscilador armónico para duplicar la velocidad máxima del objeto oscilatorio?
- Una persona está de pie sobre una báscula de baño, la cual descansa sobre una plataforma suspendida de un resorte grande. Todo el sistema ejecuta un movimiento armónico simple en dirección vertical. Describa la variación en la lectura de la báscula durante un periodo de movimiento.
- ¿Podríamos construir alguna vez un péndulo simple verdadero? Explique la respuesta.
- ¿Podrían basarse los patrones de masa, longitud, y tiempo en las propiedades de un péndulo? Explique.
- Considerando los aspectos elástico e inercial implicados, explique el hecho de que, mientras que un objeto de masa m oscile verticalmente en un resorte, el periodo depende de m pero es independiente de g , siendo lo inverso verdadero para un péndulo simple.
- Prediga, por medio de argumentos cualitativos si un péndulo oscilatorio de gran amplitud tendrá un periodo más largo o más corto que el periodo de las oscilaciones de amplitud pequeña. (Considere casos extremos.)
- A medida que la amplitud θ_m de la ecuación 25 se aproxima a 180° , ¿a qué valor cabe esperar que se aproxime el periodo? Explique en términos físicos.

18. ¿Qué le sucede a la frecuencia de un columpio cuando sus oscilaciones pasan de grandes amplitudes a pequeñas?
19. ¿Cómo resulta afectado el periodo de un péndulo cuando su punto de suspensión (a) se mueve horizontalmente en el plano de la oscilación con una aceleración a ; (b) se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración a ; (c) se mueve verticalmente hacia abajo con una aceleración $a < g$; y con una aceleración $a > g$? ¿Cuál caso, si lo hay, se aplica a un péndulo montado en una carreta que rueda hacia abajo de un plano inclinado?
20. ¿Por qué se excluyó a un eje que pasara por el centro de masa al usar la ecuación 29 para determinar T ? ¿Se aplica esta ecuación a esta clase de eje? ¿Cómo puede determinarse I para este eje usando los métodos del péndulo físico?
21. Una esfera hueca se llena de agua a través de un pequeño orificio. Se cuelga de un cordón largo y, cuando el agua va saliendo por el orificio en el fondo, hallamos que el periodo de oscilación primero aumenta y luego disminuye. Explique.
22. (a) El efecto de la masa, m , de la cuerda atada al disco, de masa M , de un péndulo, es aumentar el periodo sobre el de un péndulo simple en el cual $m = 0$. Explique esto (b) Aunque el efecto de la masa de la cuerda del péndulo es aumentar su periodo, una cuerda de longitud L , que oscila sin tener nada en el extremo ($M = 0$) tiene un periodo menor que el de un péndulo simple de longitud L . Explique esto.
23. ¿Habrá en la Luna un cambio en la frecuencia de oscilación de un péndulo de torsión si fuera éste trasladado allí? ¿De un péndulo simple? ¿De un oscilador resorte-bloque? ¿De un péndulo físico?
24. ¿Cómo puede usarse un péndulo para trazar una curva sinusoidal?
25. ¿Qué componentes de movimientos armónicos simples produciría la figura de un 8 como movimiento resultante?
26. ¿Existe alguna conexión entre la relación F contra x a nivel molecular y la relación macroscópica entre F y x en un resorte? Explique la respuesta.
27. (a) ¿En qué circunstancias sería igual la masa reducida de un sistema de dos cuerpos a la masa de uno de los cuerpos? Explique. (b) ¿Cuál es la masa reducida si los cuerpos tienen igual masa? (c) ¿Dan los casos (a) y (b) los valores extremos de la masa reducida?
28. ¿Por qué se monta sobre resortes la tina de una máquina lavadora?
29. ¿Por qué se emplean a menudo los aparatos amortiguadores en maquinaria? Dé un ejemplo.
30. Dé algunos ejemplos de fenómenos comunes en los que la resonancia juega un papel importante.
31. La marea lunar es mucho más importante que la marea solar. Sin embargo, ocurre lo contrario con las mareas en la atmósfera de la Tierra. Explique esto, usando ideas de resonancia, dado el hecho de que la atmósfera tiene un periodo de oscilación natural de casi 12 horas.
32. En la figura 20, ¿a qué valor se aproxima la amplitud de las oscilaciones forzadas cuando la frecuencia impulsora ω se aproxima a (a) cero y (b) al infinito?
33. Los edificios de diferentes alturas sufren diferentes daños durante un terremoto. Explique por qué.
34. Un cantante, al sostener una nota de la frecuencia adecuada, puede quebrar un vaso si el cristal de éste es de alta calidad, lo cual no sucede si el cristal del vaso es de baja calidad. Explique por qué.

Los resortes de cierto automóvil de 1460 kg de masa están ajustados de modo que las vibraciones tengan una frecuencia de 2.95 Hz. (a) Halle la constante de fuerza de cada uno de los cuatro resortes (supuestos idénticos). (b) ¿Cuál será la frecuencia de vibración si viajan en el automóvil cinco personas con una masa promedio de 73.2 kg cada una?

8. Un cuerpo oscila con movimiento armónico simple de acuerdo con la ecuación

$$x = (6.12 \text{ m}) \cos [(8.38 \text{ rad/s})t + 1.92 \text{ rad}].$$

Halle (a) el desplazamiento, (b) la velocidad, y (c) la aceleración en el tiempo $t = 1.90$ s. Halle también (d) la frecuencia y (e) el periodo del movimiento.

9. La carátula de un dinamómetro que lee desde 0 hasta 50.0 lb tiene 4.00 in de longitud. Se encuentra que un paquete suspendido del dinamómetro oscila verticalmente con una frecuencia de 2.00 Hz. ¿Cuánto pesa el paquete?
10. El émbolo en el cilindro de una locomotora tiene una carrera de 76.5 cm. ¿Cuál es la velocidad máxima del émbolo si las ruedas impulsoras dan 193 rev/m y el émbolo se mueve con un movimiento armónico simple?
11. La figura 24 muestra a un astronauta en un aparato de medición de la masa de un cuerpo (BMMD, *Body Mass Measurement Device*). Diseñado para usarse en vehículos espaciales en órbita, su objeto es permitir que los astronautas midan su masa en las condiciones de ingravidez en órbita alrededor de la Tierra. El aparato es una silla montada sobre resortes; el astronauta mide su periodo de oscilación en la silla; la masa se deduce de la fórmula para el periodo de un sistema oscilatorio bloque-resorte. (a) Si M es la masa del astronauta y m la masa efectiva de esa parte del aparato que también oscila, demuestre que

$$M = (k/4\pi^2)T^2 - m,$$

donde T es el periodo de oscilación y k es la constante de fuerza. (b) La constante de fuerza es $k = 605.6$ N/m para el aparato en la Misión Skylab 2; el periodo de oscilación de la silla vacía es de 0.90149 s. Calcule la masa efectiva de la silla. (c) Con el astronauta en la silla, el periodo de oscilación resulta ser de 2.08832 s. Calcule la masa del astronauta.

12. Un objeto de 2.14 kg cuelga de un resorte. Un cuerpo de 325 g colgado abajo del objeto estira adicionalmente al resorte 1.80 cm. El cuerpo de 325 g es retirado y el objeto entra en oscilación. Halle el periodo del movimiento.
13. En cierto puerto marítimo, las mareas causan que la superficie del mar se eleve y descienda en movimiento armónico simple, con un periodo de 12.5 h. ¿Cuánto tiempo le toma al agua descender desde su altura máxima hasta la mitad de su altura máxima con respecto a su nivel promedio (de equilibrio)?
14. Dos bloques ($m = 1.22$ kg y $M = 8.73$ kg) y un resorte ($k = 344$ N/m) están dispuestos sobre una superficie horizontal, sin fricción, como se muestra en la figura 25. El coeficiente de fricción estática entre los bloques es de 0.42. Halle la amplitud máxima posible del movimiento

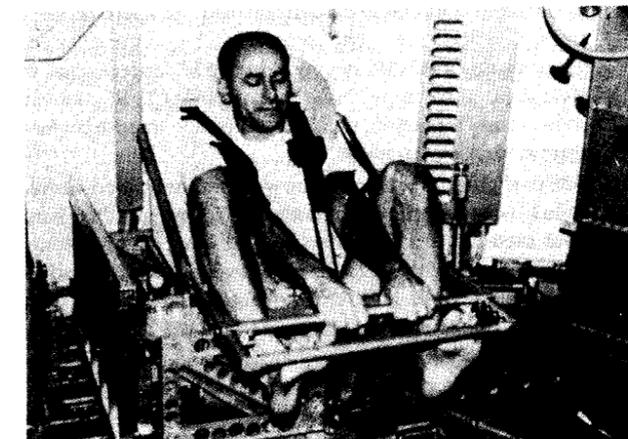


Figura 24 Problema 11.

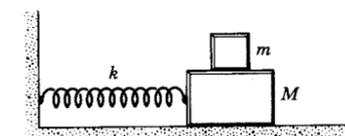


Figura 25 Problema 14

armónico simple sin que ocurra un deslizamiento entre los bloques.

15. Un bloque está sobre una superficie horizontal (una mesa vibratoria) que se mueve horizontalmente con un movimiento armónico simple de 2.35 Hz de frecuencia. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es de 0.630. ¿A qué amplitud puede llegar sin que el bloque resbale a lo largo de la superficie?
16. Un bloque está sobre un émbolo que se mueve verticalmente con movimiento armónico simple. (a) ¿A qué amplitud del movimiento se separarán el bloque y el émbolo si el periodo del movimiento del émbolo es de 1.18 s? (b) Si el émbolo tiene una amplitud de 5.12 cm en su movimiento, halle la frecuencia máxima a la cual estarán en contacto el bloque y el émbolo continuamente.
17. La fuerza de interacción entre dos átomos de ciertas moléculas diatómicas puede representarse por $F = -a/r^2 + b/r^3$, donde a y b son constantes positivas y r es la distancia de separación entre los átomos. Haga una gráfica de F contra r . Luego (a) demuestre que la separación en el equilibrio es b/a ; (b) demuestre que, para pequeñas oscilaciones respecto a esta separación de equilibrio, la constante de fuerza es a^4/b^3 ; (c) halle el periodo de este movimiento.
18. Un oscilador consta de un bloque unido a un resorte ($k = 456$ N/m). En cierto tiempo t , la posición (medida desde la posición de equilibrio), la velocidad, y la aceleración del bloque son $x = 0.112$ m, $v = -13.6$ m/s, $a = -123$ m/s². Calcule (a) la frecuencia, (b) la masa del bloque, y (c) la amplitud de la oscilación.
19. Dos partículas oscilan en movimiento armónico simple a lo largo de un segmento de línea recta común de longitud

PROBLEMAS

Sección 15-3 Movimiento armónico simple

1. Un bloque de 3.94 kg estira a un resorte de 15.7 cm desde su posición no estirada. El bloque se retira y en su lugar se cuelga un objeto de 0.520 kg. Halle el periodo de su oscilación.
2. Un oscilador consta de un bloque de 512 g de masa unido a un resorte. Cuando es puesto en oscilación con una amplitud de 34.7 cm, se observa que repite su movimiento cada 0.484 s. Halle (a) el periodo, (b) la frecuencia, (c) la frecuencia angular, (d) la constante de fuerza, (e) la velocidad máxima, y (f) la fuerza máxima ejercida sobre el bloque.
3. Las frecuencias de vibración de los átomos de los sólidos a temperaturas normales son del orden de 10.0 THz. Imagínese que los átomos estuviesen unidos entre sí por "resortes". Supóngase que un átomo de plata aislado vibre con esta frecuencia y que los demás átomos estén en reposo. Calcúlese la constante de fuerza efectiva. Un mol de plata tiene una masa de 108 g y contiene 6.02×10^{23} átomos.
4. Un altoparlante produce un sonido musical por medio de la oscilación de un diafragma. Si la amplitud de la oscilación está limitada a 1.20×10^{-3} mm, ¿qué frecuencias darán por resultado que la aceleración del diafragma exceda de g ?
5. Un objeto de 5.22 kg está unido a la parte inferior de un resorte vertical y es puesto a vibrar. La velocidad máxima del objeto es de 15.3 cm/s y el periodo es de 645 ms. Halle (a) la constante de fuerza del resorte, (b) la amplitud del movimiento, y (c) la frecuencia de oscilación.
6. En una rasuradora eléctrica, la hoja se mueve de un lado a otro sobre una distancia de 2.00 mm. El movimiento es armónico simple, con una frecuencia de 120 Hz. Halle (a) la amplitud, (b) la velocidad máxima de la hoja, y (c) la aceleración máxima de la hoja.
7. Puede considerarse que un automóvil está montado sobre cuatro resortes en lo que respecta a oscilaciones verticales.

L. Cada partícula tiene un periodo de 1.50 s pero difieren en fase en 30.0° . (a) ¿Qué separación hay entre ellas (en términos de L) 0.500 s después de que la partícula que va atrás deja un extremo de la trayectoria? (b) ¿Se mueven en la misma dirección, una hacia la otra, o una alejándose entre sí en ese momento?

20. Dos partículas efectúan un movimiento armónico simple de la misma amplitud y frecuencia a lo largo de la misma línea recta. Se cruzan entre sí cuando van en direcciones opuestas cada vez que su desplazamiento es la mitad de su amplitud. Halle la diferencia de fase entre ellas.
21. Dos resortes están unidos a un bloque de masa m que puede deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura 26. Demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

donde v_1 y v_2 son las frecuencias a las que oscilaría el bloque si se uniera solamente al resorte 1 o al resorte 2. (La analogía eléctrica de este sistema es una combinación en serie de dos capacitores.)

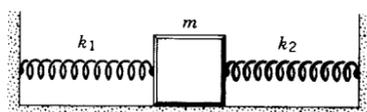


Figura 26 Problema 21.

22. Dos resortes unidos entre sí se enlazan al bloque de masa m como se muestra en la figura 27. Las superficies carecen de fricción. Si los resortes, por separado, tienen constantes de fuerza k_1 y k_2 , demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

donde v_1 y v_2 son las frecuencias a las que oscilaría el bloque si estuviera unido solamente al resorte 1 o al resorte 2. (La analogía eléctrica de este sistema es una combinación en paralelo de dos capacitores.)

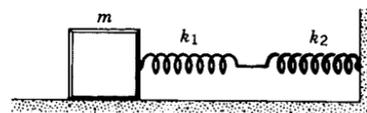


Figura 27 Problema 22.

23. Tres vagones de mineral de 10,000 kg se mantienen en reposo en una pendiente de 26.0° sobre los rieles de una mina usando un cable paralelo a la pendiente (Fig. 28). Se observa que el cable se estira 14.2 cm justo antes de que se rompa el acoplamiento, desenganchando a uno de los

vagones. Halle (a) la frecuencia de las oscilaciones resultantes de los dos vagones restantes y (b) la amplitud de la oscilación.

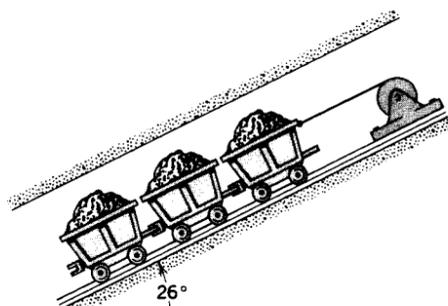


Figura 28 Problema 23.

24. Un resorte sin masa de 3.60 N/cm de constante de fuerza es cortado en dos mitades. (a) ¿Cuál es la constante de fuerza de cada mitad? (b) Las dos mitades, suspendidas por separado, soportan un bloque de masa M (véase la Fig. 29). El sistema vibra con una frecuencia de 2.87 Hz. Halle el valor de la masa M .

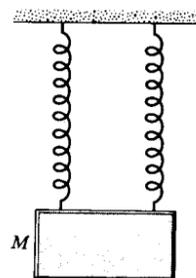


Figura 29 Problema 24.

25. Si la masa de un resorte m_s no es despreciable, pero es pequeña comparada con la masa m del objeto suspendido de él, el periodo del movimiento es $T = 2\pi\sqrt{(m + m_s/3)/k}$. Derive este resultado. (Sugerencia: La condición $m_s \ll m$ equivale a la hipótesis de que el resorte se estira proporcionalmente a lo largo de su longitud.) (Véase H. L. Armstrong, *American Journal of Physics*, Vol 37, pág. 447, 1969, para una solución completa del caso general.)

Sección 15-4 Consideraciones energéticas en el movimiento armónico simple

26. Un sistema oscilatorio bloque-resorte tiene una energía mecánica de 1.18 J, una amplitud de 9.84 cm, y una velocidad máxima de 1.22 m/s. Halle (a) la constante de fuerza del resorte, (b) la masa del bloque, y (c) la frecuencia de oscilación.
27. Una gran resortera (hipotética) se estira 1.53 m para lanzar un proyectil de 130 g con una velocidad suficiente para

que escape de la Tierra (11.2 km/s). (a) ¿Cuál es la constante de fuerza del aparato, si toda la energía potencial se convierte en energía cinética? (b) Supóngase que una persona promedio puede ejercer una fuerza de 220 N. ¿Cuántas personas se necesitan para estirar la resortera?

28. (a) Cuando el desplazamiento es la mitad de la amplitud x_m , ¿qué fracción de la energía total es cinética y qué fracción es potencial en el movimiento armónico simple? (b) ¿A qué desplazamiento es la energía mitad cinética y mitad potencial?
29. Una partícula de 12.3 kg se halla en movimiento armónico simple con una amplitud de 1.86 mm. La aceleración máxima de la partícula es de 7.93 km/s^2 . (a) Halle el periodo del movimiento. (b) ¿Cuál es la velocidad máxima de la partícula? (c) Calcule la energía mecánica total de este oscilador armónico simple.
30. Un objeto de 5.13 kg se mueve sobre una superficie horizontal sin fricción bajo la influencia de un resorte de constante de fuerza 9.88 N/cm. El objeto es desplazado 53.5 cm y se le da una velocidad inicial de 11.2 m/s hacia la posición de equilibrio. Halle (a) la frecuencia del movimiento, (b) la energía potencial inicial del sistema, (c) la energía cinética inicial, y (d) la amplitud del movimiento.
31. Demuestre que las relaciones generales entre los dos valores iniciales de posición $x(0)$ y de velocidad $v(0)$, y la amplitud x_m y el ángulo fase ϕ de la ecuación 6 son

$$x_m = \sqrt{[x(0)]^2 + [v(0)/\omega]^2}, \quad \tan \phi = -v(0)/\omega x(0).$$

32. Resuelva la ecuación 16, que expresa la conservación de la energía, para dt e integre el resultado. Supóngase que $x = x_m$ en $t = 0$, y demuestre que se obtiene la ecuación 6 (con $\phi = 0$) o sea, el desplazamiento en función del tiempo.
33. Un objeto de 1.26 kg de masa unido a un resorte de 5.38 N/cm de constante de fuerza se pone en oscilación estirando el resorte 26.3 cm y dando al objeto una velocidad de 3.72 m/s hacia la posición de equilibrio del resorte. Usando los resultados obtenidos en el problema 31, calcule (a) la amplitud y (b) el ángulo fase del movimiento armónico simple resultante.
34. Un bloque de masa M , en reposo sobre una mesa horizontal sin fricción, está unido a un soporte rígido por medio de un resorte de constante de fuerza k . Una bala de masa m y velocidad v golpea al bloque como se muestra en la figura 30. La bala se queda empotrada en el bloque. Determine la amplitud del movimiento armónico simple resultante en términos de m , M , v y k .

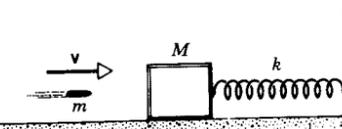


Figura 30 Problema 34.

35. Considérese un resorte sin masa de constante de fuerza k en un campo gravitatorio uniforme y unamos a él un objeto

de masa m . (a) Demuestre que si $x = 0$ marca la posición relajada del resorte, la posición de equilibrio está dada por $x = mg/k$ (véase la Fig. 31). Demuestre que la ecuación de movimiento del sistema masa-resorte es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg$$

y que la solución para el desplazamiento en función del tiempo es $x = x_m \cos(\omega t + \phi) + mg/k$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$ como anteriormente. (c) Demuestre, por lo tanto, que el sistema tiene las mismas ω , v , a , v y T en un campo gravitatorio uniforme y en ausencia de tal campo, con el único cambio de que la posición de equilibrio se ha desplazado en mg/k . (d) Considere ahora la energía del sistema, $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg(h-x) = \text{constante}$, y demuestre que la diferenciación respecto al tiempo conduce a la ecuación de movimiento de la parte (b). (e) Demuestre que cuando el objeto cae desde $x = 0$ a la posición de equilibrio estático, $x = mg/k$, la pérdida de energía potencial gravitatoria va una mitad a una ganancia en energía potencial elástica y la otra mitad a una ganancia en energía cinética. (f) Por último, considérese al sistema en movimiento respecto a la posición de equilibrio estático. Calcule por separado el cambio de la energía potencial gravitatoria y de la energía potencial elástica cuando el objeto se mueve hacia arriba con un desplazamiento x_m , y cuando el objeto se mueva hacia abajo con un desplazamiento x_m . Demuestre que el cambio total en la energía potencial es el mismo en cada caso, es decir, $\frac{1}{2}kx_m^2$. A la vista de los resultados (c) y (f), podemos simplemente despreciar el campo gravitatorio uniforme en el análisis haciendo el cambio de la posición de referencia de $x = 0$ a $x_0 = x - mg/k = 0$. La curva de la nueva energía potencial [$U(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \text{constante}$] tiene la misma forma parabólica que la curva de la energía potencial en ausencia de campo gravitatorio [$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$].

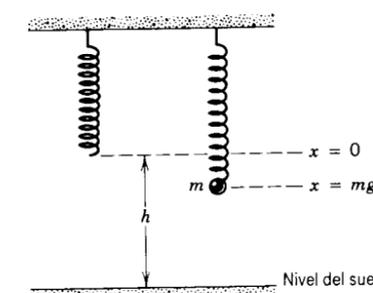


Figura 31 Problema 35.

36. Un bloque de 4.00 kg está suspendido de un resorte con una constante de fuerza de 5.00 N/cm. Una bala de 50.0 g se dispara hacia el bloque desde abajo a una velocidad de 150 m/s y llega al reposo dentro del bloque. (a) Halle la amplitud del movimiento armónico simple resultante. (b) ¿Qué fracción de la energía cinética original de la bala aparece como energía mecánica en el oscilador?
37. Un cilindro sólido está unido a un resorte horizontal sin masa de modo que puede rodar sin resbalar a lo largo de

una superficie horizontal, como en la figura 32. La constante de fuerza k del resorte es de 2.94 N/cm. Si el sistema parte del reposo desde una posición en que el resorte está estirado 23.9 cm, halle (a) la energía cinética de traslación y (b) la energía cinética de rotación del cilindro al pasar por la posición de equilibrio. (c) Demuestre que en estas condiciones el centro de masa del cilindro efectúa un movimiento armónico simple con un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{3M/2k},$$

donde M es la masa del cilindro.

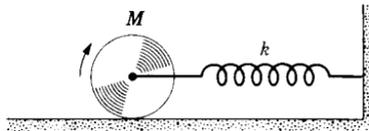


Figura 32 Problema 37.

38. (a) Demuestre que en el movimiento armónico simple la energía potencial promedio es igual a la energía cinética promedio cuando el promedio se toma respecto al tiempo durante un periodo del movimiento, y que cada promedio es igual a $\frac{1}{4}kx_m^2$. (b) Demuestre que cuando el promedio se toma respecto a la posición durante un ciclo, la energía potencial promedio es igual a $\frac{1}{6}kx_m^2$ y que la energía cinética promedio es igual a $\frac{1}{3}kx_m^2$. (c) Explique físicamente por qué los dos resultados de arriba (a y b) son diferentes.

Sección 15-5 Aplicaciones del movimiento armónico simple

39. Halle la longitud de un péndulo simple cuyo periodo sea 1.00 s en una localidad donde $g = 9.82 \text{ m/s}^2$.
40. Un péndulo simple de 1.53 m de longitud efectúa 72.0 oscilaciones completas en 180 s en una cierta localidad. Halle la aceleración debida a la gravedad en este punto.
41. Una bola de demolición de 2500 kg se halla suspendida del extremo de una grúa, como se muestra en la figura 33. La longitud del cable que cuelga es de 17.3 m. Halle el periodo de balanceo, suponiendo que el sistema pueda ser tratado como un péndulo simple.
42. Existe una relación interesante entre el sistema bloque-resorte y el péndulo simple. Supongamos que usted cuelga un objeto de masa M del extremo de un resorte, y que cuando el objeto está en equilibrio el resorte es estirado una distancia h . Demuestre que la frecuencia de este sistema bloque-resorte es la misma que la de un péndulo simple de masa m y longitud h , aun cuando $m \neq M$; véase la figura 34.
43. Un aro circular de 65.3 cm de radio y 2.16 kg de masa está suspendido de un clavo horizontal. (a) Halle la frecuencia de oscilación para desplazamientos pequeños desde el equilibrio. (b) ¿Cuál es la longitud del péndulo simple equivalente?
44. Un ingeniero desea hallar la inercia rotatoria de un objeto de forma rara de 11.3 kg de masa respecto a un eje que pase por su centro de masa. El objeto está soportado con

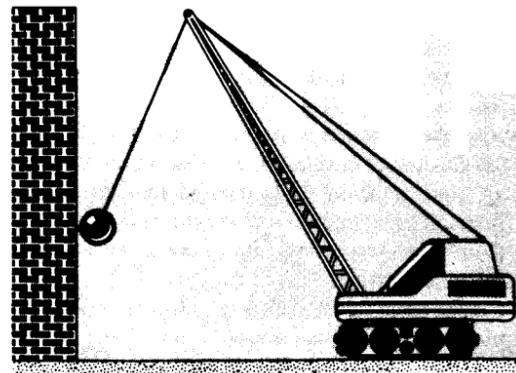


Figura 33 Problema 41.

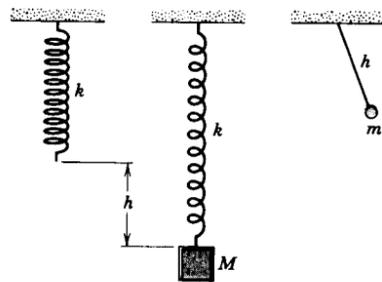


Figura 34 Problema 42.

un alambre que pasa por su centro de masa y a lo largo del eje deseado. El alambre tiene una constante de torsión $\kappa = 0.513 \text{ N} \cdot \text{m}$. El ingeniero observa que este péndulo de torsión efectúa 20.0 ciclos completos en 48.7 s. ¿Qué valor se calcula para la inercia rotatoria?

45. Un péndulo físico consta de un disco sólido uniforme de masa $M = 563 \text{ g}$ y radio $R = 14.4 \text{ cm}$ soportado en un plano vertical por un pivote situado a una distancia $d = 10.2 \text{ cm}$ del centro del disco, como se muestra en la figura 35. El disco se desplaza un pequeño ángulo y luego se suelta. Halle el periodo del movimiento armónico simple resultante.

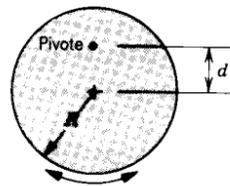


Figura 35 Problema 45.

46. Una esfera sólida de 95.2 kg con un radio de 14.8 cm está suspendida de un alambre vertical unido al techo de una sala. Se requiere una torca de $0.192 \text{ N} \cdot \text{m}$ para retorcer a la esfera en un ángulo de 0.850 rad . Halle el

periodo de oscilación cuando la esfera se suelte desde esta posición.

47. Un péndulo físico consta de una barra de un metro pivotada en un pequeño orificio taladrado a través de la barra a una distancia x de la marca de 50.0 cm. Se observa que el periodo de oscilación es de 2.50 s. Halle la distancia x .
48. Un péndulo consta de un disco uniforme de 10.3 cm de radio y 488 g de masa unido a una barra de 52.4 cm de longitud que tiene una masa de 272 g; véase la figura 36. (a) Calcule la inercia rotatoria del péndulo respecto al pivote. (b) ¿Cuál es la distancia entre el pivote y el centro de masa del péndulo? (c) Calcule el periodo de oscilación para ángulos pequeños.

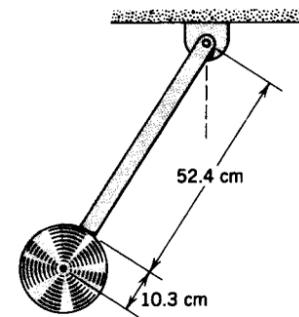


Figura 36 Problema 48.

49. Se forma un péndulo al pivotar una barra larga de longitud L y masa m en torno a un punto en la barra que está a una distancia d sobre el centro de la varilla. (a) Halle el periodo de pequeña amplitud de este péndulo en términos de d , L , m , y g . (b) Demuestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando $d = L/\sqrt{12} = 0.289L$.
50. Una rueda puede girar en torno a su eje fijo. Se une un resorte a uno de sus rayos a una distancia r del eje, como se muestra en la figura 37. Suponiendo que la rueda sea un aro de masa M y radio R , obtenga la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones de este sistema en términos de M , R , r , y la constante de fuerza k . Discuta los casos especiales $r = R$ y $r = 0$.

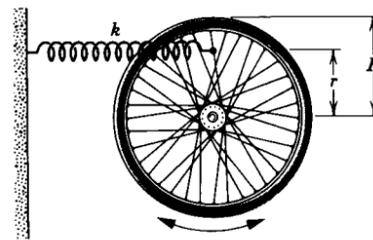


Figura 37 Problema 50.

51. Una barra de un metro se balancea de un extremo y oscila con una frecuencia ν_0 . ¿Cuál sería la frecuencia, en términos de ν_0 , si se cortase el tercio inferior de la barra?

52. Una partícula se suelta desde el reposo en un punto P dentro de un tazón hemisférico sin fricción de radio R . (a) Demuestre que cuando P está cerca del fondo del tazón la partícula experimenta un movimiento armónico simple. (b) Halle la longitud del péndulo simple equivalente.
53. Un péndulo físico tiene dos puntos de pivoteo posibles; uno tiene una posición fija y el otro es ajustable a lo largo de la longitud del péndulo, como se muestra en la figura 38. El periodo del péndulo cuando está suspendido del pivote fijo es T . El péndulo es luego invertido y suspendido del pivote ajustable. La posición de este pivote se mueve hasta que, por medio de pruebas sucesivas, el péndulo tenga el mismo periodo que antes, es decir, T . Demuestre que la aceleración de caída libre g está dada por

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2},$$

donde L es la distancia entre los dos puntos de pivoteo. Nótese que g puede medirse de esta manera sin que sea necesario conocer la inercia rotatoria del péndulo o cualquiera de sus demás dimensiones excepto L .

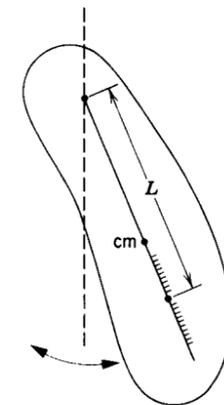


Figura 38 Problema 53.

54. Un disco de 2.50 kg y diámetro de 42.0 cm, está soportado por una barra ligera de 76.0 cm de largo, la cual está pivotada en su extremo, como se muestra en la figura 39. (a) Inicialmente el ligero resorte de torsión no está unido. ¿Cuál es el periodo de oscilación? (b) Ahora se une el resorte de torsión de modo que la barra cuelgue verticalmente en equilibrio. ¿Cuál sería la constante de torsión del resorte de modo que el nuevo periodo de oscilación sea 500 ms más corto que antes?
55. Un péndulo simple de longitud L y masa m está suspendido en un automóvil que viaja a una velocidad constante v alrededor de un círculo de radio R . Si el péndulo experimenta pequeñas oscilaciones en dirección radial respecto a su posición de equilibrio, ¿cuál será su frecuencia de oscilación?
56. La figura 40 muestra un péndulo físico construido a partir de secciones de igual longitud de un mismo tubo. El radio interior del tubo es 10.2 cm y el espesor es 6.40 mm. (a)

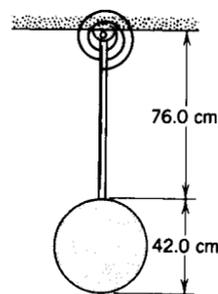


Figura 39 Problema 54.

Calcule el periodo de oscilación respecto al pivote mostrado. (b) Supóngase que se construye un nuevo péndulo físico al girar la sección del fondo a 90° en torno a un eje vertical que pase por su centro. Demuestre que el nuevo periodo de oscilación respecto al mismo pivote es alrededor del 2% menor que el periodo del péndulo original.



Figura 40 Problema 56.

Sección 15-7 Combinaciones de movimientos armónicos

57. Trace la trayectoria de una partícula que se mueva en el plano xy de acuerdo a $x = x_m \cos(\omega t - \pi/2)$, $y = 2x_m \cos(\omega t)$.
58. El diagrama que se muestra en la figura 41 es el resultado de combinar los dos movimientos armónicos simples $x = x_m \cos \omega_x t$ y $y = y_m \cos(\omega_y t + \phi_y)$. (a) Cuál es el valor de x_m/y_m ? (b) ¿Cuál es el valor de ω_x/ω_y ? (c) Cuál es el valor de ϕ_y ?
59. Los electrones de un osciloscopio son desviados por dos campos eléctricos mutuamente perpendiculares de modo que en cualquier tiempo t el desplazamiento está dado por

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \cos(\omega t + \phi_y).$$

Describa la trayectoria de los electrones y determine sus ecuaciones cuando (a) $\phi_y = 0^\circ$, (b) $\phi_y = 30^\circ$, y (c) $\phi_y = 90^\circ$

60. Una partícula de masa m se mueve en un plano fijo a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r} = iA \cos \omega t + jA \cos 3 \omega t$. (a) Trace la trayectoria de la partícula. (b) Halle la fuerza que actúa sobre la partícula. Halle también (c) su energía potencial y (d) su energía total, ambas en función del tiempo. (e) ¿Es periódico el movimiento? De ser así, halle el periodo.
61. Cuando se combinan oscilaciones en ángulo recto, las frecuencias del movimiento de la partícula en las direcciones x y y no necesitan ser iguales, de modo que, en el caso general, las ecuaciones 36 resultan ser

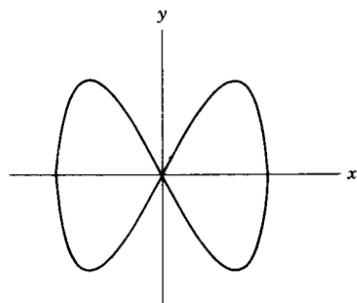


Figura 41 Problema 58

$$x = x_m \cos(\omega_x t + \phi_x) \quad y = y_m \cos(\omega_y t + \phi_y).$$

La trayectoria de la partícula ya no es una elipse, sino que ahora recibe el nombre de *curva Lissajous*, en memoria de Jules Antoine Lissajous quien fue el primero en demostrar estas curvas en 1857. (a) Si ω_x/ω_y es un número racional, de modo que las frecuencias angulares ω_x y ω_y sean "conmensurables", entonces la curva es cerrada y el movimiento se repite a sí mismo a intervalos de tiempo regulares. Suponga que $x_m = y_m$ y que $\phi_x = \phi_y$ y trace la curva Lissajous para $\omega_x/\omega_y = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, y \frac{2}{3}$. (b) Sea ω_x/ω_y un número racional, por ejemplo $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ó $\frac{2}{3}$ y demuestre que la forma de la curva Lissajous depende de la diferencia de fase $\phi_x - \phi_y$. Trace curvas para $\phi_x - \phi_y = 0, \pi/4, y \pi/2$ rad. (c) Si ω_x/ω_y no es un número racional, entonces la curva es "abierta". Convéznase de que después de un tiempo prolongado la curva habrá pasado a través de cada punto que estuviera en el rectángulo limitado por $x = \pm x_m$ y $y = \pm y_m$, sin que la partícula pase nunca dos veces por un punto determinado y a la misma velocidad. Con fines de precisión, supóngase que $\phi_x = 0$ en todo momento.

Sección 15-8 Movimiento armónico amortiguado

62. En el sistema mostrado en la figura 18, el bloque tiene una masa de 1.52 kg y la constante de fuerza es de 8.13 N/m. La fuerza de fricción está dada por $-b(dx/dt)$, donde $b = 227$ g/s. Supóngase que el bloque se jala hacia un lado una distancia de 12.5 cm y luego se suelta. (a) Calcule el intervalo de tiempo necesario para que la amplitud disminuya a un tercio de su valor inicial. (b) Cuántas oscilaciones efectúa el bloque en este tiempo?
63. Verifique, usando derivadas, que la ecuación 38 es la solución de la ecuación 37 para el oscilador amortiguado, a condición de que la frecuencia ω' esté dada por la ecuación 39.
64. Un oscilador armónico amortiguado consta de un bloque ($m = 1.91$ kg), un resorte ($k = 12.6$ N/m), y una fuerza de amortiguamiento $F = -bv$. Inicialmente, oscila con una amplitud de 26.2 cm; a causa del amortiguamiento, la amplitud disminuye a tres cuartas partes de este valor inicial después de cuatro ciclos completos. (a) ¿Cuál es el valor de b ? (b) ¿Cuánta energía se ha "perdido" durante estos cuatro ciclos?

65. Supóngase que está examinando las características de un sistema de suspensión de un automóvil de 2000 kg. La suspensión "se comprime" 10 cm cuando se comprime sobre ella el peso de todo el automóvil. Además, la amplitud de la oscilación disminuye en 50% durante una oscilación completa. Calcule los valores de k y b para el resorte y el sistema amortiguador en cada rueda. Supóngase que cada rueda soporte 500 kg.

Sección 15-9 Oscilaciones forzadas y resonancia

66. Considérense las oscilaciones forzadas de un sistema bloque-resorte amortiguado. Demuestre que, en resonancia, (a) la amplitud de la oscilación es $x_m = F_m/b\omega$, y (b) la velocidad máxima del bloque oscilatorio es $v_{max} = F_m/b$.
67. Un automóvil de 2200 lb que transporta a cuatro personas de 180 lb viaja por una carretera de terracería "ondulada". Las ondulaciones de la carretera tienen una separación de 13 ft. Se observa que el automóvil rebota con amplitud máxima cuando su velocidad es de 10 mi/h. Ahora se detiene el automóvil y se bajan las cuatro personas ¿En cuánto se eleva la carrocería del automóvil sobre su suspensión debido a esta disminución del peso?
68. A partir de la ecuación 42 halle la velocidad $v(= dx/dt)$ en el movimiento oscilatorio forzado. Demuestre que la amplitud de la velocidad es $v_m = F_m/[(m\omega'' - k/\omega'')^2 + b^2]^{1/2}$. Las ecuaciones de la sección 15-9 son idénticas en su forma a las que representan un circuito eléctrico que contiene una resistencia R , una inductancia L , y una capacitancia C en serie con una fem alternante $V = V_m \cos \omega'' t$. De aquí que b, m, k , y F_m sean análogas a $R, L, 1/C$, y V_m , respectivamente y que x y v sean análogas a la carga eléctrica q y la corriente i , respectivamente. En el caso eléctrico, se usa la amplitud de la corriente i_m , análoga a la amplitud de la velocidad v_m para describir la calidad de la resonancia.

Sección 15-10 Oscilaciones de dos cuerpos

69. Supóngase que el resorte de la figura 22a tiene una constante de fuerza $k = 252$ N/m. Sean $m_1 = 1.13$ kg y $m_2 = 3.24$ kg. Calcule el periodo de oscilación del sistema de dos cuerpos.
70. (a) Demuestre que cuando $m_2 \rightarrow \infty$ en la ecuación 46, $m \rightarrow m_1$. (b) Demuestre que el efecto de un muro no infinito ($m_2 < \infty$) sobre las oscilaciones de un cuerpo de masa m_1 , situado en el extremo de un resorte unido a la pared es reducir el periodo, o aumentar la frecuencia de la oscilación en comparación con (a). (c) Demuestre que cuando $m_2 = m_1$ el efecto es como si el resorte se cortara a la mitad, oscilando cada cuerpo independientemente con respecto al centro de masa situado en el punto medio.
71. (a) Calcule la masa reducida de cada una de las siguientes moléculas diatómicas: O_2 , HCl , y CO . Expresé sus respuestas en unidades atómicas de masa unificadas, siendo 1.00 u la masa de un átomo de hidrógeno. (b) Se sabe que una molécula de HCl vibra a una frecuencia fundamental de $\nu = 8.7 \times 10^3$ Hz. Halle la "constante de fuerza" efectiva k de las fuerzas de acoplamiento entre los átomos. En función de su experiencia con resortes ordinarios, ¿diría

usted que este "resorte molecular" es relativamente rígido o que no lo es?

72. Demuestre que la energía cinética del oscilador de dos cuerpos de la figura 22a está dada por $K = \frac{1}{2}m v^2$, donde m es la masa reducida y $v (= v_1 - v_2)$ es la velocidad relativa. Puede servir de ayuda notar que el ímpetu lineal se conserva mientras el sistema oscila.

Proyectos para la computadora

73. Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para calcular la amplitud y la fase de un movimiento armónico simple cuando se proporcionan la constante de fuerza k , la masa m , la coordenada inicial x_0 , y la velocidad inicial v_0 . Escriba la coordenada como $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$ y utilice $\omega = \sqrt{k/m}$, $x_m = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$, y $\phi = \tan^{-1}(-v_0/\omega x_0)$. Asegúrese de comprobar que el valor calculado de ϕ es correcto verificando que $\cos \phi$ tenga el mismo signo que x_0 y que $\sin \phi$ tenga el mismo signo que v_0 . Si no lo tienen, sume 180° (o π rad) al valor calculado. Sea cuidadoso y evite dividir entre cero. Si $x_0 = 0$, automáticamente ponga $\phi = +90^\circ$ ó -90° sin intentar el cálculo de $v_0/\omega x_0$. Por supuesto, el ángulo que usted elija depende del signo de v_0 . Escriba el programa de modo que una vez que se haya terminado un cálculo regrese al principio y pida los datos para el siguiente problema. He aquí algunas oscilaciones a tratar. En todas sostiene una masa de 250 g y un resorte con una constante de fuerza de 200 N/m. (a) $x_0 = 2.8$ cm, $v_0 = 0$. (b) $x_0 = -2.8$ cm, $v_0 = 0$. (c) $x_0 = 0$, $v_0 = 56$ cm/s. (d) $x_0 = 0$, $v_0 = -56$ cm/s. (e) $x_0 = 2.8$ cm, $v_0 = 56$ cm/s. (f) $x_0 = 2.8$ cm, $v_0 = -56$ cm/s. (g) $x_0 = -2.8$ cm, $v_0 = 56$ cm/s. (h) $x_0 = -2.8$ cm, $v_0 = -56$ cm/s.
74. Usted puede usar una computadora para estudiar las oscilaciones amortiguadas. Considérese una masa m en el extremo de un resorte con constante de fuerza k , sujeto a una fuerza de arrastre proporcional a su velocidad. La segunda ley de Newton da $m d^2x/dt^2 = -kx - bv$. Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para calcular la coordenada x , la velocidad v , y la energía mecánica total E al final de cada intervalo de tiempo de duración Δt desde $t = 0$ hasta $t = t_f$. Véase la sección 6-6 y los proyectos para la computadora al final del capítulo 6. Use el programa para resolver los problemas siguientes. En cada caso tomar $m = 2.0$ kg, $k = 350$ N/m, $x_0 = 0.070$ m, $v_0 = 0$, $t_f = 1.0$ s. Use un intervalo de integración de 0.001 s. (a) Considere que $b = 2.8$ kg/s y, en gráficas por separado, trace $x(t)$ y $E(t)$. Nótese la disminución en la amplitud con el transcurso del tiempo. La disminución se asocia íntimamente a una pérdida de energía por la fuerza de arrastre. Nótese que la gráfica de la energía tiene oscilaciones pequeñas y que existen regiones pequeñas donde la energía es casi constante. ¿Dónde se presentan estas regiones en el movimiento oscilatorio? Ofrezca una explicación física de su existencia. ¿Cambia la fuerza de arrastre al movimiento el periodo de la oscilación? Úsese la gráfica para calcular el tiempo entre máximos sucesivos y compare el resultado con $2\pi\sqrt{m/k}$. (b) Si la fuerza de arrastre se aumenta lo suficiente, no ocurren oscilaciones y se dice que el movimiento está *sobreamortiguado*. Tome $b = 110$ kg/s y use el programa para trazar a $x(t)$ y a $E(t)$.

75. Si se aplica una fuerza sinusoidal a un objeto colocado en el extremo de un resorte, la segunda ley de Newton se convierte en $md^2x/dt^2 = -kx - b\dot{x} + F_m \cos \omega''t$. Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para calcular la coordenada x , la velocidad v , y la energía mecánica total E del oscilador al final de cada intervalo de tiempo de duración Δt desde $t = 0$ hasta $t = t_f$. Véase la sección 6-6 y los proyectos de computación al final del capítulo 6. Para los siguientes problemas tome $m = 2.0$ kg, $k = 350$ N/m, $x_0 = 0.070$ m, $v_0 = 0$, $t_f = 2.0$ s. Use un intervalo de integración de 0.001 s. (a) Desprecie el amortiguamiento haciendo que $b = 0$ y considere que $F_m = 18$ N y $\omega'' = 35$ rad/s. Use su programa para trazar $x(t)$ y $E(t)$ en gráficas por separado. Nótese que la fuerza aplicada causa desviaciones ligeras de la forma sinusoidal. Nótese también que la fuerza aplicada transfiere energía al oscilador durante ciertas porciones del movimiento y la quita durante otros. Como resultado, la amplitud cambia ligeramente con el tiempo. Use la gráfica para estimar la amplitud promedio. Calcule también el periodo y use su valor para calcular la frecuencia angular. ¿Está más cerca de 35 rad/s

o de $\omega = \sqrt{k/m}$? (b) Una vez más tome $b = 0$ y considere que $F_m = 18$ N pero suponga que $\omega'' = 15$ rad/s, mucho más cerca de $\sqrt{k/m}$. Trace $x(t)$ y $E(t)$ y note el crecimiento de la amplitud y de la energía. La fuerza aplicada pone energía en el oscilador durante periodos mucho más largos que cuando absorbe energía. (c) Tome en cuenta ahora el amortiguamiento haciendo que $b = 15$ kg/s. Una vez más considere que $F_m = 18$ N y $\omega'' = 35$ rad/s, lejos de $\sqrt{k/m}$. Trace $x(t)$ y $E(t)$. Use su gráfica para hallar la frecuencia angular cerca de $t = 0$ y cerca de $t = 2$ s. Usted podría medir la mitad de un periodo y duplicar el resultado. Nótese que al principio el movimiento está cerca del movimiento natural, el movimiento en ausencia de una fuerza aplicada. En 1 s aproximadamente el movimiento natural se ha amortiguado de manera considerable y el movimiento subsiguiente es aquel que resulta de la aplicación de una fuerza externa a la masa. Calcule la amplitud cerca de $t = 2$ s. (d) Repita la parte (c) pero tomando $\omega'' = 15$ rad/s. Calcule la amplitud. (e) ¿Para cuál de las situaciones consideradas es más grande la amplitud cerca de $t = 2$ s? ¿Y la más pequeña?

CAPÍTULO 16

GRAVITACIÓN

Hasta aquí hemos estudiado los efectos de las fuerzas, sin ser demasiado específicos acerca de lo que determina su magnitud y dirección. En este capítulo trataremos los detalles de una fuerza particularmente importante, la gravitación. En 1665 Newton dedujo que la fuerza que rige la caída de las manzanas cerca de la Tierra es la misma que la que mantiene a la Luna en su órbita. Éste fue el primer paso hacia el desarrollo de una ley de la gravitación que pudiera servir para cualquier cuerpo en el universo.

Después de presentar la ley de Newton de la gravitación universal, exponemos sus consecuencias y sus pruebas experimentales. Demostramos que la gravedad de la Tierra puede entenderse como un caso particular de esta ley universal, y que los movimientos de los planetas pueden explicarse de modo similar. Concluimos con una visión de la teoría gravitatoria moderna, llamada teoría general de la relatividad de Einstein, la cual da resultados correctos cuando la fuerza gravitatoria es fuerte (donde la teoría de Newton no sirve) y coincide con la teoría de Newton cuando la fuerza gravitatoria es débil.

Al estudiar este capítulo conviene observar que muchos de los conceptos básicos de la dinámica estudiados en capítulos anteriores encuentran aquí una aplicación. Así, aplicamos las leyes básicas para las fuerzas, la energía potencial, la conservación de la energía y el ímpetu angular, el movimiento armónico, y las propiedades de los cuerpos extensos. Presentaremos también conceptos nuevos, incluyendo la noción de campo, la cual tendrá aplicación en capítulos siguientes.

16-1 LA GRAVITACIÓN DESDE LA ANTIGÜEDAD HASTA KEPLER

Cuando menos desde los tiempos de la antigua Grecia, dos problemas constituían el centro de búsqueda de conocimiento: (1) la tendencia de los objetos, como las piedras, a regresar a la Tierra al dejarlos caer, y (2) los movimientos de los planetas, incluyendo el Sol y la Luna, los cuales se consideraban como planetas en aquellos tiempos. En la antigüedad se creía que estos dos problemas eran temas completamente separados uno del otro. Uno de los grandes logros de Newton consiste en que él los vio claramente como aspectos de un solo problema y sometido a las mismas leyes.

Los primeros intentos serios para explicar la cinemática del sistema solar fueron llevados a cabo por los antiguos griegos. Ptolomeo (Claudius Ptolemaeus, siglo II) desarrolló un esquema geocéntrico (con la Tierra como centro) para el sistema solar según el cual, como lo implica su

nombre, la Tierra permanecía estacionaria en el centro mientras los planetas, incluidos el Sol y la Luna, giraban alrededor de ella. Esto no debería tomarse como una deducción sorprendente. La Tierra resulta para nosotros un cuerpo sustancial. Shakespeare se refiere a ella como "esta hermosa armazón, la Tierra..." Incluso hoy en día, usamos un marco de referencia geocéntrico en la astronáutica, y en la conversación cotidiana empleamos términos como "la salida del Sol", lo cual implica la idea de un marco así.

Puesto que las órbitas circulares simples no pueden ser explicación de los movimientos complicados de los planetas, Ptolomeo tuvo que echar mano del concepto de epiciclo, según el cual un planeta se mueve alrededor de un círculo cuyo centro se mueve alrededor de otro círculo cuyo centro es la Tierra (véase la Fig. 1a). También tuvo que recurrir a otros diversos esquemas geométricos, cada uno de los cuales preservaba la supuesta santidad del círculo como una característica central de los movimientos planetarios. Ahora sabemos que no es un

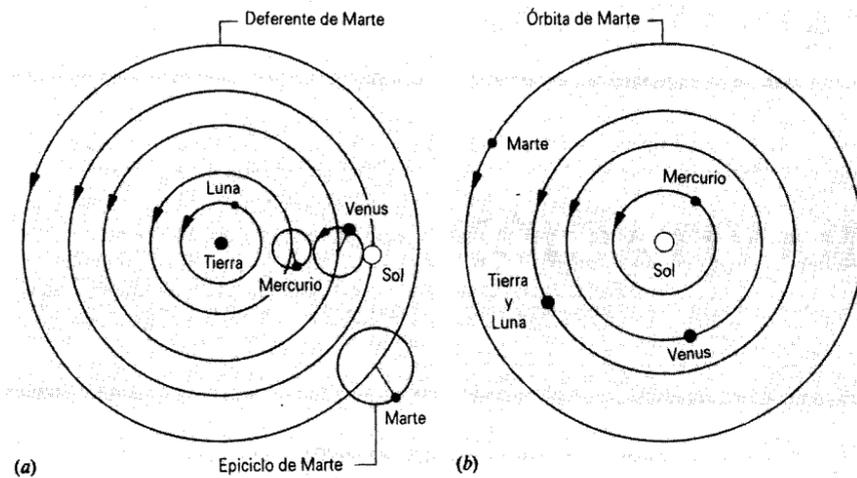


Figura 1 (a) La visión ptolemaica del sistema solar. La Tierra está en el centro, y el Sol y los planetas se mueven alrededor de ella. Los planetas se mueven en círculos pequeños (epiciclos), cuyos centros viajan a lo largo de círculos grandes (deferentes). (b) La visión copernicana del sistema solar. El Sol está en el centro, y los planetas se mueven alrededor de él.

círculo el fundamental sino una elipse, con el Sol en un centro, como lo veremos más adelante.

En el siglo XVI Nicolás Copérnico (1473-1543) propuso un esquema heliocéntrico (con el Sol como centro), en el cual la Tierra (junto con los demás planetas) se movía alrededor del Sol (véase la Fig. 1b). Aun cuando el esquema de Copérnico parece mucho más sencillo que el de Ptolomeo, no tuvo aceptación inmediata. Copérnico aún creía en la santidad de los círculos, y su uso de los epiciclos y otros esquemas (que no se muestran en la Fig. 1b) era casi tan grande como el de Ptolomeo. Sin embargo, al poner al Sol como el centro de las cosas, Copérnico proporcionó el marco de referencia correcto desde el cual pudo desarrollarse nuestra moderna visión del sistema solar.

Para resolver el conflicto entre los esquemas ptolemaico y copernicano, se necesitaron datos de observación más precisos. Tales datos fueron compilados por Tycho Brahe* (1546-1601), que fue el último gran astrónomo en hacer observaciones sin el uso de un telescopio. Sus datos sobre los movimientos planetarios fueron analizados e interpretados por Johannes Kepler (1571-1630), quien había sido asistente de Brahe. Kepler encontró importantes regularidades en el movimiento de los planetas, lo cual le condujo a desarrollar tres leyes (que se estudian en la sección 16-8) que rigen el movimiento de los planetas.

Las leyes de Kepler mostraron la gran sencillez con que podían describirse los movimientos planetarios al considerar al Sol como el cuerpo central, si abandonamos la noción de círculos perfectos en que se basaban tanto el sistema de Ptolomeo como el de Copérnico. Sin embargo, las leyes de Kepler eran empíricas; simplemente descri-

bían los movimientos observados de los planetas sin ninguna base en términos de fuerzas. † Por lo tanto, constituyó un enorme triunfo el que Newton fuera capaz más tarde de derivar las leyes de Kepler a partir de sus leyes del movimiento y su ley de la gravitación, la cual especificaba la fuerza que actúa entre cada planeta y el Sol.

Así pues, Newton pudo explicar el movimiento de los planetas en el sistema solar y de los cuerpos que caían en las cercanías de la Tierra con un concepto común. En efecto, él unificó en una sola teoría las ciencias anteriormente separadas de la mecánica terrestre y de la mecánica celeste. El significado científico real del trabajo de Copérnico radica en el hecho de que la teoría heliocéntrica abrió el camino para esta síntesis. Posteriormente, bajo la hipótesis de que la Tierra gira sobre sí misma y alrededor del Sol, fue posible explicar fenómenos diversos tales como el movimiento diario y anual aparente de las estrellas, el aplastamiento de la Tierra a partir de su forma esférica, el comportamiento de los vientos alisios, y muchas otras observaciones que no podrían ser explicadas tan fácilmente en una teoría geocéntrica.

El desarrollo histórico de la teoría gravitatoria puede ser visto como el ejemplo modelo de la manera en que el método de la investigación científica conduce a la comprensión y al conocimiento. Copérnico proporcionó el marco de referencia apropiado para visualizar el problema, y Brahe suministró datos experimentales sistemáticos y precisos. Kepler usó los datos para proponer algunas leyes empíricas, y Newton propuso una ley de fuerza universal a partir de la cual pudieran derivarse las leyes de Kepler. Por último, Einstein llegó a una nueva teoría que podía explicar ciertas pequeñas discrepancias en la teoría newtoniana.

* Véase "Copernicus and Tycho", por Owen Gingerich, *Scientific American*, diciembre de 1973, pág. 86.

† Véase "How Did Kepler Discover His First Two Laws", por Curtis Wilson, *Scientific American*, marzo de 1972, pág. 92.

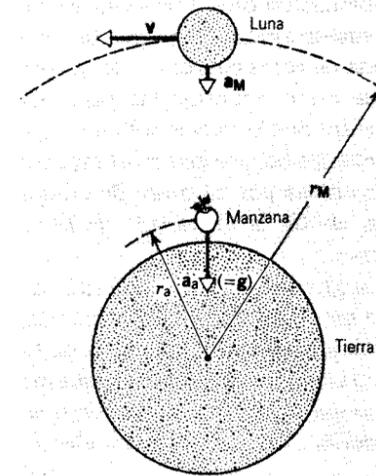


Figura 2 Tanto la Luna como la manzana son atraídas hacia el centro de la Tierra. La diferencia en sus movimientos surge de que la Luna tiene la suficiente velocidad tangencial v para mantener una órbita circular.

16-2 NEWTON Y LA LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

En 1665 Newton, a los 23 años de edad, dejó la Universidad de Cambridge para trasladarse a Lincolnshire cuando aquélla tuvo que clausurarse a causa de la peste. Unos 50 años más tarde escribió: "En el mismo año (1665) comencé a pensar que la gravedad se extendía también a la órbita de la Luna ... y después de haber comparado la fuerza necesaria para mantener a la Luna en su órbita con la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra, les encontré una respuesta bastante semejante."

Un joven amigo de Newton, William Stukeley, escribió acerca de una ocasión en que, tomando la merienda con Newton bajo unos manzanos, Newton comentó que el escenario en que se hallaban era el mismo que cuando concibió la idea de la gravitación. "Fue ocasionado por la caída de una manzana estando él sentado mientras meditaba, ... y entonces, poco a poco, comenzó a aplicar esta propiedad de la gravitación al movimiento de la Tierra y a los cuerpos celestes..." (véase la Fig. 2).

Podemos calcular la aceleración de la Luna hacia la Tierra a partir de su periodo de revolución y del radio de su órbita. Obtenemos 0.0027 m/s^2 (véase el problema muestra 5, capítulo 4). Este valor es aproximadamente 3600 veces menor que g , la aceleración de la caída libre en la superficie de la Tierra. Newton, guiándose por la tercera ley de Kepler (véase el problema 58), visualizó esta diferencia suponiendo que la aceleración de un cuerpo al caer es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a la Tierra.

Surge de inmediato la pregunta de qué queremos decir por "distancia a la Tierra". Newton llegó finalmente a considerar que cada partícula de la Tierra contribuía a la atracción gravitatoria que tenía sobre otros cuerpos. Tuvo la audacia de suponer que la masa de la Tierra podría ser tratada como si estuviese toda ella concentrada en su centro. (Véase la sección 16-5.)

Podemos tratar a la Tierra como una partícula con respecto al Sol, por ejemplo. Sin embargo, no es obvio que podamos tratar a la Tierra como una partícula respecto a una manzana situada a sólo un par de metros sobre su superficie. Si asumimos esta hipótesis, un cuerpo que caiga cerca de la superficie de la Tierra está a una distancia de un radio terrestre (6400 km) del centro efectivo de atracción de la Tierra. La Luna está a unos 380,000 km de distancia. El inverso de los cuadrados de la razón de estas distancias es $(6400/380,000)^2 = 1/3600$, de acuerdo con la razón de las aceleraciones de la Luna y de la manzana. En las palabras de Newton citadas anteriormente, en verdad coinciden en una "respuesta bastante parecida".

Existen tres ámbitos entrelazados dentro de los cuales podemos estudiar la gravitación. (1) La atracción gravitatoria entre dos bolas de boliche, por ejemplo, aunque medible según técnicas sensibles, es demasiado débil como para caer dentro de nuestras percepciones sensoriales ordinarias. (2) La atracción de la Tierra sobre nosotros y los objetos que nos rodean es una característica que controla nuestras vidas, de la cual podemos escapar sólo con medidas extremas. Los diseñadores del programa espacial no descuidan por ningún momento la fuerza gravitatoria. (3) En la escala del sistema solar y de la interacción de las estrellas y las galaxias, la gravitación es por mucho la fuerza dominante. Es notable que las tres situaciones puedan ser descritas por la misma ley de fuerza.

Esta ley de fuerza, la ley de la gravitación universal de Newton, puede ser enunciada como sigue:

Todas las partículas del universo se atraen entre sí con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La dirección de esta fuerza es a lo largo de la línea que las une.

Así pues, la magnitud de la fuerza gravitatoria F que ejercen entre sí dos partículas de masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r es

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

Aquí G , llamada constante gravitatoria, es una constante universal que tiene el mismo valor para todos los pares de partículas.

Es importante observar que las fuerzas gravitatorias entre dos partículas son un par acción-reacción. La prime-

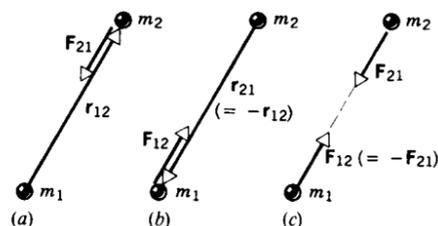


Figura 3 (a) La fuerza F_{21} ejercida sobre m_2 (por m_1) tiene dirección opuesta al vector de posición, r_{12} , de m_2 respecto a m_1 . (b) La fuerza F_{12} ejercida sobre m_1 (por m_2) tiene dirección opuesta al vector de posición, r_{21} , de m_1 respecto a m_2 . (c) $F_{12} = -F_{21}$, siendo las fuerzas un par acción-reacción.

ra partícula ejerce una fuerza sobre la segunda partícula que se dirige hacia la primera partícula a lo largo de la línea que las une. De igual modo, la segunda partícula ejerce una fuerza sobre la primera partícula que se dirige hacia la segunda partícula a lo largo de la línea que las une. Estas fuerzas son de igual magnitud pero se oponen directamente.

La constante universal G no debe confundirse con la g que es la aceleración de un cuerpo que sale de la gravedad de la Tierra. La constante G tiene las dimensiones L^3/MT^2 y es un escalar, mientras que g es la magnitud de un vector, tiene las dimensiones L/T^2 , y no es ni universal ni constante.

Nótese que la ley de la gravitación universal de Newton no es una ecuación definitoria de cualquiera de las cantidades físicas (fuerza, masa, o longitud) contenida en ella. De acuerdo con nuestro programa de la mecánica clásica en el capítulo 5, la fuerza se define a partir de la segunda ley de Newton, $F = ma$. La fuerza F sobre una partícula se entiende que está relacionada de una manera simple con las propiedades medibles de una partícula y de su entorno. La ley de la gravitación universal tiene esta clase de simplicidad. Una vez que ha sido determinada G a partir de un experimento para cualquier par de cuerpos, ese valor de G puede ser usado en la ley de la gravitación para determinar la fuerza gravitatoria entre cualquier otro par de cuerpos.

Nótese también que la ecuación 1 expresa la fuerza entre *partículas*. Si queremos determinar la fuerza entre cuerpos extensos, como, por ejemplo, la Tierra y la Luna, debemos considerar a cada cuerpo como compuesto de partículas. Así pues, debe calcularse la interacción entre todas las partículas. El cálculo integral hace posible tal cálculo. Los motivos que Newton tuvo para desarrollar el cálculo surgieron en parte del deseo de resolver tales problemas. Aunque, en general, y para propósitos gravitatorios, es incorrecto suponer que toda la masa de un cuerpo pueda estar concentrada en su centro de masa, la hipótesis es correcta para cuerpos esféricamente simétricos. A menudo usamos este resultado, el cual demostraremos en la sección 16-5.

La experimentación ofrece pruebas muy obvias de que la fuerza gravitatoria entre dos partículas es independiente de la presencia de otros cuerpos y de las propiedades del medio en que están inmersas las partículas. La fuerza gravitatoria entre dos bolas de boliche permanece inmutable ya sea que las bolas estén en el espacio libre, o bajo el agua, o separadas por un muro de tabique. De hecho, las "pantallas contra la gravedad" de la ciencia-ficción carecen de base.

La ley de la gravitación universal es una *ley vectorial*, la cual puede ser expresada como sigue. Hagamos que el vector de posición r_{12} apunte desde la partícula de masa m_1 a la partícula de masa m_2 , como lo muestra la figura 3a. La fuerza gravitatoria F_{21} , ejercida sobre m_2 por m_1 , está dada en dirección y magnitud por la relación vectorial

$$F_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} r_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{r_{12}}{r_{12}}, \quad (2a)$$

donde r_{12} es la magnitud de r_{12} . El signo menos en la ecuación 2a muestra que F_{21} apunta en una dirección opuesta a r_{12} ; esto es, la fuerza gravitatoria es de atracción, experimentando m_2 una fuerza dirigida hacia m_1 . El vector de posición dividido entre su propia magnitud, r_{12}/r_{12} , es simplemente un vector unitario u , en dirección del vector, así que la última parte de la ecuación 2a muestra la naturaleza de inverso de los cuadrados de la fuerza. La fuerza ejercida sobre m_1 por m_2 (véase la Fig. 3b) es, similarmente,

$$F_{12} = -G \frac{m_2 m_1}{r_{21}^3} r_{21} = -G \frac{m_2 m_1}{r_{21}^2} \frac{r_{21}}{r_{21}}. \quad (2b)$$

Nótese en las ecuaciones 2a y 2b que $r_{21} = -r_{12}$ (véanse las Figs. 3a y 3b), de modo que, como lo esperábamos, $F_{12} = -F_{21}$ (véase la Fig. 3c); esto es, las fuerzas gravitatorias que actúan sobre los dos cuerpos forman un par acción-reacción.

16-3 LA CONSTANTE GRAVITATORIA G

Puede parecer que determinar el valor de G es una tarea sencilla. Todo lo que necesitamos hacer es medir la fuerza gravitatoria F entre dos masas conocidas m y m_2 separadas por una distancia conocida r . Podemos calcular entonces G a partir de la ecuación 1.

Un sistema a gran escala como el de la Tierra y la Luna o la Tierra y el Sol no sirven para determinar el valor de G . Las distancias son tan grandes que los objetos pueden ser considerados aproximadamente como masas puntuales, pero los valores de las masas no se determinan en forma independiente. De hecho, las masas de esos cuerpos, como pronto lo veremos, se determinan usando el valor de G .

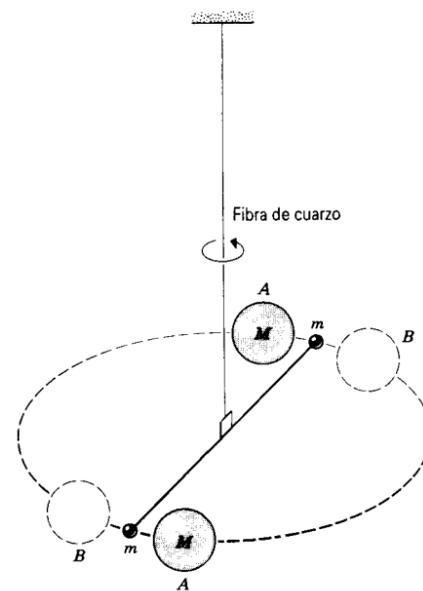


Figura 4 Vista esquemática del aparato usado en 1798 por Henry Cavendish para medir la constante gravitatoria G . Las esferas grandes de masa M , mostradas en la posición AA , pueden también moverse a la posición BB .

En vez de esto debemos basarnos en mediciones a pequeña escala para lo que usamos dos muestras de laboratorio de masas conocidas y medimos la fuerza entre ellos. La fuerza es muy débil y las marcas deben colocarse cerca entre sí para hacer que la fuerza sea lo más grande posible. Al hacerlo así, no podemos considerar a las masas como concentradas en puntos por lo que la ecuación 1 no es aplicable. Sin embargo, hay un caso especial en que podemos usar la ecuación 1 para objetos grandes. Como demostraremos en la sección 16-5, para distribuciones esféricas de la masa podemos considerar el objeto como una masa puntual concentrada en su centro. Esto *no* es una aproximación sino una relación exacta.

La primera determinación en laboratorio del valor de G , a partir de la fuerza entre masas esféricas situadas entre sí a corta distancia, fue realizada por Henry Cavendish en 1798. Él usó un método basado en la balanza de torsión, que se ilustra en la figura 4. Dos bolas pequeñas, cada una de masa m , están unidas a los extremos de una barra ligera. Esta mancuerna rígida se suspende, con su eje horizontal, de una fina fibra vertical. Dos bolas grandes, cada una de masa M , se colocan cerca de los extremos de la mancuerna, en lados opuestos. Cuando las masas grandes están en las posiciones A , atraen a las masas pequeñas de acuerdo con la ley de la gravitación, y sobre la mancuerna se ejerce una torca que la hace girar en sentido antihorario vista desde arriba. La barra llega a una posición de equilibrio bajo las acciones opuestas de la torca gravitatoria, ejercida por las masas M y la torca de restitución ejercida por la

fibra. Cuando las masas grandes están en las posiciones B , la mancuerna gira en sentido horario hacia una nueva posición de equilibrio. El ángulo 2θ , a través del cual se retuerce la fibra cuando las bolas se mueven de una posición (AA) a la otra (BB), se mide observando la desviación de un haz de luz reflejado en un pequeño espejo unido a la fibra. A partir del valor de θ y la constante de torsión de la fibra, determinada al medir su periodo de oscilación (véase la sección 15-5), puede determinarse la torca y obtenerse la fuerza gravitatoria. Conociendo los valores de las masas m y M y la separación de sus centros, podemos calcular G . (Véase el problema muestra 1.)

El experimento original de Cavendish dio un valor para G de $6.75 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. En los casi 200 años desde los tiempos de Cavendish, se ha usado la misma técnica básica de la balanza de torsión para repetir esta medición muchas veces, conduciendo al valor de G aceptado actualmente,

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2,$$

con una incertidumbre de $\pm 0.00085 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ o alrededor de $\pm 0.013\%$. En comparación con los resultados de la medición de otras constantes físicas, esta precisión no es excepcionalmente notable; por ejemplo, la velocidad de la luz fue medida con una precisión de alrededor de $10^{-8}\%$ antes de que su valor fuese establecido como un patrón. Es difícil mejorar sustancialmente la precisión del valor medido de G a causa de su pequeña magnitud y el valor correspondientemente pequeño de la fuerza entre los dos objetos de nuestros experimentos de laboratorio. Si usamos dos esferas de plomo de 10 cm de diámetro (y 6 kg de masa), la fuerza gravitatoria máxima entre ellas cuando están lo más cerca posible es de alrededor de $2 \times 10^{-7} \text{ N}$, que aproximadamente corresponde al peso de un trozo de papel de 1 mm² de área.

Esta dificultad para medir G es desafortunada, ya que la gravitación tiene un papel esencial en las teorías del origen y la estructura del universo. Por ejemplo, nos gustaría saber si G es realmente una constante. ¿Cambia con el tiempo? ¿Depende del estado químico o físico de las masas? ¿Depende de su temperatura? A pesar de muchas investigaciones experimentales, hasta ahora no han sido confirmadas tales variaciones de G sin ambigüedad; sin embargo, las mediciones continúan depurándose y mejorándose, y siguen adelante las pruebas experimentales.*

* Para una lista de referencias de las mediciones de G , véase "The Newtonian Gravitational Constant", por George T. Gillies, *Metrologia*, vol. 24, pág. 1, 1987. Un estudio de estos experimentos y de otros que prueban la ley del inverso de los cuadrados puede ser hallada en "Experiments on Gravitation", por Alan Cook, *Reports on Progress in Physics*, vol. 51, pág. 707, 1988.

La gran fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre todos los cuerpos cerca de su superficie se debe a la gran masa de la Tierra. De hecho, la masa de la Tierra puede ser determinada a partir de la ley de la gravitación universal y el valor de G calculado a partir del experimento de Cavendish. Por esta razón se dice que Cavendish ha sido la primera persona que "pesó" la Tierra. (De hecho, el título del escrito de Cavendish para describir sus experimentos se refería no a la medición de G , sino a la determinación de la densidad de la Tierra a partir de su peso y volumen.) Consideremos a la Tierra, de masa M_T , y a un objeto en su superficie, de masa m . La fuerza de atracción está dada por

$$F = mg \quad \text{y} \quad F = \frac{GmM_T}{R_T^2}$$

Aquí R_T es el radio de la Tierra, el cual es la separación de los dos cuerpos, y g es la aceleración en caída libre en la superficie de la Tierra. Al combinar estas ecuaciones obtenemos

$$M_T = \frac{gR_T^2}{G} = \frac{(9.80 \text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2}{6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Dividiendo la masa de la Tierra entre su volumen, obtenemos que la densidad promedio de la Tierra es de 5.5 g/cm^3 , o alrededor de 5.5 veces la densidad del agua. La densidad promedio de las rocas de la superficie de la Tierra es mucho menor que este valor. Concluimos que el interior de la Tierra contiene material de una densidad mayor de 5.5 g/cm^3 . ¡El experimento de Cavendish nos dio información acerca del núcleo de la Tierra! (Véase el problema 26.)

Problema muestra 1 En el aparato de Cavendish que se ilustra en la figura 4, supongamos que $M = 12.7 \text{ kg}$ y $m = 9.85 \text{ g}$. La longitud L de la barra que une a las dos pequeñas esferas es de 52.4 cm . La barra y la fibra forman un péndulo de torsión cuya inercia rotatoria I respecto al eje central es de $1.25 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y cuyo periodo de oscilación T es de 769 s . El ángulo 2θ entre las dos posiciones de equilibrio de la barra es de 0.516° cuando la distancia R entre los centros de las esferas grande y pequeña es de 10.8 cm . ¿Cuál es el valor de la constante gravitatoria que resulta de estos datos?

Solución Hallemos primero a κ , la constante de torsión de la fibra. El periodo de oscilación torsionante está dado por la ecuación 21 del capítulo 15,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

Resolviendo para κ nos da

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{(4\pi^2)(1.25 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)}{(769 \text{ s})^2} = 8.34 \times 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m}$$

La barra está en equilibrio bajo la influencia de dos torcas opuestas, resultantes de las acciones de la fibra y de las esferas

grandes. La magnitud de la torca ejercida por la fibra se relaciona con el desplazamiento angular θ de acuerdo con la ecuación 17 del capítulo 15,

$$\tau = \kappa\theta = (8.34 \times 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m}) \left(\frac{0.516^\circ}{2} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \right) = 3.75 \times 10^{-10} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Esta torca está equilibrada por la torca total debida a la fuerza gravitatoria ejercida por cada esfera grande sobre la esfera pequeña vecina. La fuerza F sobre cada esfera pequeña es igual a GMm/R^2 , y el brazo del momento es la mitad de la longitud L de la barra. La torca gravitatoria total es entonces

$$\tau = (2F)(L/2) = FL = \frac{GMmL}{R^2}$$

Resolviendo para G nos da

$$G = \frac{\tau R^2}{MmL} = \frac{(3.75 \times 10^{-10} \text{ N} \cdot \text{m})(0.108 \text{ m})^2}{(12.7 \text{ kg})(0.00985 \text{ kg})(0.524 \text{ m})} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

Problema muestra 2 Calcule las fuerzas gravitatorias (a) entre dos bolas de boliche de 7.3 kg separadas por 0.65 m entre sus centros y (b) entre la Tierra y la Luna.

Solución (a) Usando la ecuación 1, tenemos

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(7.3 \text{ kg})(7.3 \text{ kg})}{(0.65 \text{ m})^2} = 8.4 \times 10^{-9} \text{ N}$$

(b) Usando los datos de la Tierra y de la Luna que aparecen en el apéndice C, hallamos

$$F = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(7.36 \times 10^{22} \text{ kg})}{(3.82 \times 10^8 \text{ m})^2} = 2.01 \times 10^{20} \text{ N}$$

16-4 LA GRAVEDAD CERCA DE LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

Supongamos, por el momento, que la Tierra es esférica y que su densidad depende solamente de la distancia radial desde su centro. La magnitud de la fuerza gravitatoria que actúa sobre una partícula de masa m , situada en un punto externo a una distancia r desde el centro de la Tierra, puede entonces expresarse, partiendo de la ecuación 1, como:

$$F = G \frac{M_T m}{r^2}$$

donde M_T es la masa de la Tierra. Esta fuerza gravitatoria puede también expresarse, partiendo de la segunda ley de Newton, como:

$$F = mg_0$$

TABLA 1 VARIACIÓN DE g_0 CON LA ALTITUD

Altitud (km)	g_0 (m/s^2)
0	9.83
5	9.81
10	9.80
50	9.68
100	9.53
400†	8.70
35,700‡	0.225
380,000§	0.0027

† Altitud típica de una nave espacial.

‡ Altitud de los satélites de comunicación.

§ Distancia a la Luna.

Aquí g_0 es la aceleración en caída libre debida únicamente a la atracción gravitatoria de la Tierra. Al combinar las dos ecuaciones de arriba nos da

$$g_0 = \frac{GM_T}{r^2} \quad (3)$$

La tabla 1 muestra algunos valores de g_0 en diversas altitudes sobre la superficie de la Tierra, calculadas a partir de esta ecuación. Nótese que, contrariamente a la impresión de que la gravedad desciende a cero en un satélite en órbita, hallamos que $g_0 = 8.7 \text{ m/s}^2$ para altitudes típicas de las naves espaciales.

La Tierra real difiere de nuestro modelo de la Tierra de tres maneras.

1. *La corteza de la Tierra no es uniforme.* Existen variaciones de densidad locales en todas partes. La medición precisa de las variaciones locales en la aceleración en caída libre da información que es útil, por ejemplo, en las exploraciones de petróleo. La figura 5 muestra un levantamiento de la gravedad en un domo salino subterráneo. Los contornos unen puntos con la misma aceleración en caída libre, trazados como desviaciones de un valor de referencia conveniente. La unidad, llamada así en honor de Galileo, es el miligal, donde $1 \text{ gal} = 10^3 \text{ mgal} = 1 \text{ cm/s}^2$.

2. *La Tierra no es una esfera.* La Tierra es aproximadamente un elipsoide, achatada en los polos y abultada en el ecuador. El radio ecuatorial de la Tierra es mayor que su radio polar en 21 km . Así pues, un punto en los polos está más cerca del núcleo denso de la Tierra que un punto en el ecuador. Cabría esperar que la aceleración en caída libre aumentara cuando se va al nivel del mar, desde el ecuador a los polos. La figura 6 muestra qué es lo que sucede en realidad. Los valores medidos de g en esta figura incluyen tanto el efecto del abultamiento ecuatorial como los efectos resultantes de la rotación de la Tierra.

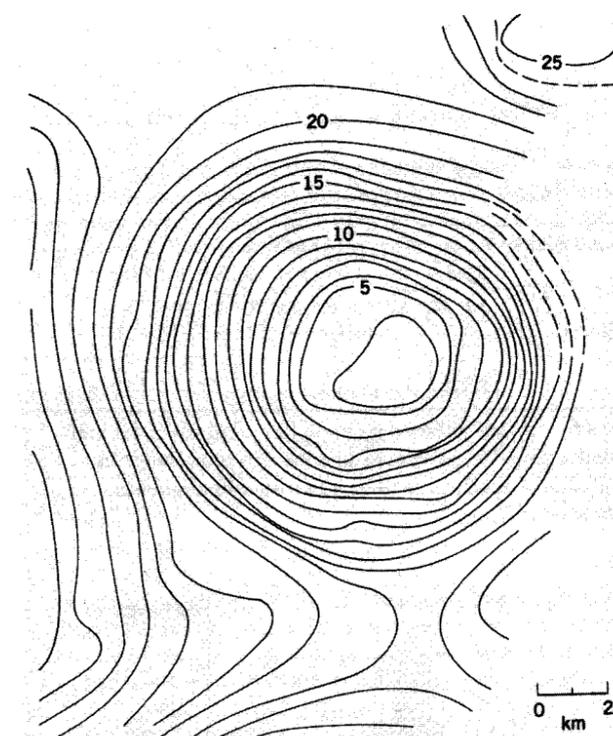


Figura 5 Un levantamiento gravimétrico en la superficie en un domo salino subterráneo en Dinamarca. Las líneas unen puntos con el mismo valor de g . La diferencia entre el valor de g en una línea y el valor en el centro está en unidades miligal, equivalentes a 10^{-5} m/s^2 o alrededor de $10^{-6} g$. Está claro que hay aquí algo enterrado que ejerce una fuerza centrada en esta región. Suele suceder que a menudo se halla petróleo en una formación como ésta.

3. *La Tierra está girando.* La figura 7a muestra a la Tierra girando desde una posición en el espacio por encima del polo Norte. Un guacal de masa m descansa sobre una báscula de plataforma en el ecuador. Este guacal está en un movimiento circular uniforme debido a la rotación de la Tierra y se acelera hacia el centro de la Tierra. La fuerza resultante que actúa sobre él debe entonces apuntar en esa dirección.

La figura 7b es un diagrama de cuerpo libre del guacal. La Tierra ejerce una atracción gravitatoria hacia abajo de magnitud mg_0 . La báscula de plataforma empuja hacia arriba al guacal con una fuerza mg , el peso del guacal. Estas dos fuerzas no se equilibran realmente, y así tenemos, partiendo de la segunda ley de Newton,

$$F = mg_0 - mg = ma$$

o sea

$$g_0 - g = a,$$

donde a es la aceleración centrípeta del guacal. Para a podemos escribir $\omega^2 R_T$, donde ω es la velocidad angu-

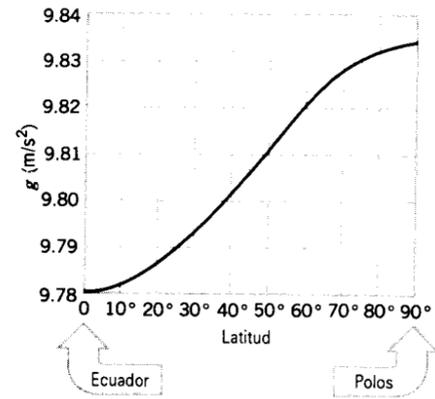


Figura 6 La variación de g con la latitud al nivel del mar. Alrededor del 65% del efecto se debe a la rotación de la Tierra; el 35% restante se debe a la forma ligeramente achatada de la Tierra.

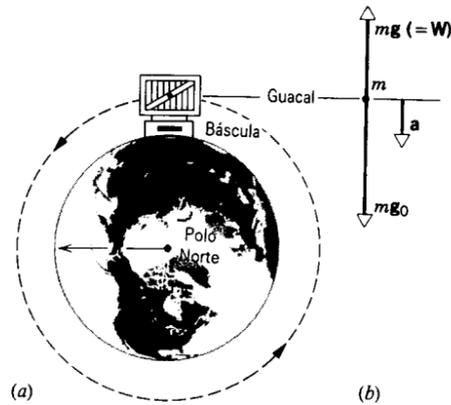


Figura 7 (a) Un guacal sobre la Tierra en rotación, descansa sobre una báscula de plataforma situada en el ecuador. La vista es a lo largo del eje rotatorio de la Tierra, viendo hacia abajo al polo norte. (b) Un diagrama de cuerpo libre del guacal. El guacal está en un movimiento circular uniforme y, por lo mismo, se acelera hacia el centro de la Tierra.

lar de la Tierra y R_T es su radio. Esta sustitución nos lleva a

$$g_0 - g = \omega^2 R_T = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_T, \quad (4)$$

donde $T = 24$ h, es el periodo de rotación de la Tierra. Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación 4 nos da

$$g_0 - g = 0.034 \text{ m/s}^2.$$

Vemos que g , la aceleración en caída libre medida en el ecuador de la Tierra mientras gira, es menor que g_0 , el resultado esperado si la Tierra no estuviese girando, por únicamente 0.034/9.8, ó 0.35%. El efecto disminuye cuando se va a latitudes mayores y se anula en los polos.

Problema muestra 3 (a) Una estrella neutrónica es una estrella colapsada de densidad extraordinariamente alta. La estrella pulsante (pulsar) en la nebulosa del Cangrejo es la más conocida de muchos de estos ejemplos. Consideremos una estrella neutrónica con una masa M igual a la masa del Sol, 1.99×10^{30} kg, y un radio R de 12 km. ¿Cuál es la aceleración en caída libre en su superficie? Desprecie los efectos rotatorios. (b) El asteroide Ceres tiene una masa de 1.2×10^{21} kg y un radio de 470 km. ¿Cuál es la aceleración en caída libre en su superficie?

Solución (a) Partiendo de la ecuación 3 tenemos

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1.99 \times 10^{30} \text{ kg})}{(12,000 \text{ m})^2} = 9.2 \times 10^{11} \text{ m/s}^2.$$

Aun cuando los pulsares giran a velocidad extraordinaria, los efectos rotatorios tienen solamente una influencia pequeña sobre el valor de g , a causa del pequeño tamaño de esas estrellas.

(b) En el caso del asteroide Ceres, tenemos

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1.2 \times 10^{21} \text{ kg})}{(4.7 \times 10^5 \text{ m})^2} = 0.36 \text{ m/s}^2.$$

¿Existe un acentuado contraste entre las fuerzas gravitatorias en la superficie de estos dos cuerpos!

16-5 EFECTO GRAVITATORIO DE UNA DISTRIBUCIÓN ESFÉRICA DE LA MATERIA (Opcional)

Probaremos ahora un resultado que ya hemos utilizado: un cuerpo esféricamente simétrico atrae partículas del exterior como si su masa estuviese concentrada en su centro. Comenzamos considerando un cascarón esférico uniformemente denso de masa M cuyo espesor t es pequeño en comparación con su radio R (figura 8). Buscamos la fuerza gravitatoria que ejerce sobre una partícula externa P de masa m .

Suponemos que cada partícula del cascarón ejerce sobre P una fuerza que es proporcional a la masa de la partícula, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre esa partícula del casco y P , y dirigida a lo largo de la línea que las une. Debemos entonces obtener la fuerza resultante sobre P , atribuible a todas las partes del cascarón esférico.

Una pequeña parte del cascarón en A atrae a m con una fuerza F_A . Una pequeña parte de igual masa en B , igualmente alejada de m pero diametralmente opuesta a A , atrae a m con una fuerza F_B . La resultante de estas dos fuerzas que actúan sobre m es $F_A + F_B$. Cada una de estas fuerzas tiene una componente $F \cos \alpha$ a lo largo del eje de simetría y una componente $F \sin \alpha$ perpendicular al eje. Las componentes perpendiculares de F_A y F_B se cancelan, como en el caso de todos los pares de puntos opuestos. Para hallar la fuerza resultante sobre P para todos los puntos del cascarón, necesitamos solamente considerar las componentes paralelas al eje.

Tomemos como elemento de masa del cascarón a una faja circular dM . Su radio es $R \sin \theta$, su longitud es $2\pi(R \sin \theta)$, su anchura es $R d\theta$, y su espesor es t . De aquí que tenga un volumen

$$dV = 2\pi t R^2 \sin \theta d\theta.$$

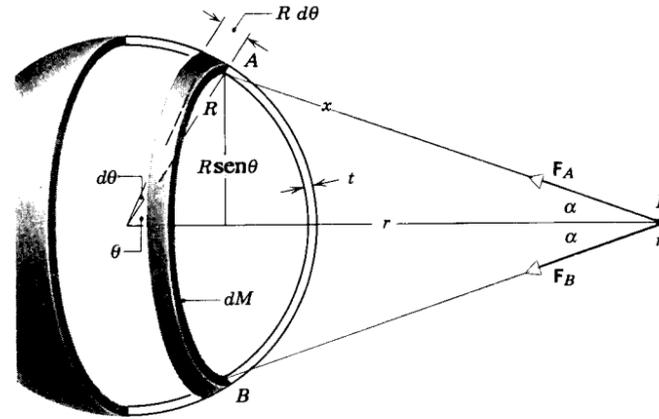


Figura 8 Atracción gravitatoria de una sección de un cascarón esférico de materia sobre una partícula de masa m en P .

Sea ρ la densidad del cascarón, de modo que la masa de la faja es

$$dM = \rho dV = 2\pi t \rho R^2 \sin \theta d\theta.$$

Cada partícula de la faja, tal como la de masa dm_A en A , atrae a P con una fuerza que tiene una componente axial

$$dF_A = G \frac{m dm_A}{x^2} \cos \alpha.$$

Sumando las contribuciones de todas las partículas del anillo nos da

$$dF_A + dF_B + \dots = \frac{Gm}{x^2} (\cos \alpha)(dm_A + dm_B + \dots)$$

$$dF = \frac{Gm dM}{x^2} \cos \alpha,$$

donde dM es la masa total del anillo y dF es la fuerza total sobre m ejercida por el anillo.

Sustituyendo a dM , obtenemos

$$dF = 2\pi G t \rho m R^2 \frac{\sin \theta d\theta}{x^2} \cos \alpha. \quad (5)$$

Las variables x , α , y θ se relacionan. En la figura vemos que

$$\cos \alpha = \frac{r - R \cos \theta}{x}. \quad (6)$$

Usando la ley de los cosenos, $x^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta$, obtenemos

$$R \cos \theta = \frac{r^2 + R^2 - x^2}{2r}. \quad (7)$$

Al diferenciar la ecuación 7 nos da

$$\sin \theta d\theta = \frac{x}{rR} dx. \quad (8)$$

Ponemos ahora la ecuación 7 en la ecuación 6 y luego ponemos a las ecuaciones 6 y 8 en la ecuación 5. Como resultado eliminamos a θ y α y obtenemos

$$dF = \frac{\pi G t \rho m R}{r^2} \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx. \quad (9)$$

Esta es la fuerza ejercida por la faja circular dM sobre la partícula m .

Debemos ahora considerar a cada elemento de masa en el cascarón al sumar todas las fajas circulares de todo el cascarón. Esto implica una integración sobre el cascarón con respecto a la variable x , la cual va desde un valor mínimo $r - R$ hasta un valor máximo $r + R$. La integral necesaria es

$$\int_{r-R}^{r+R} \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx = \left[\frac{-(r^2 - R^2)}{x} + x \right]_{r-R}^{r+R} = 4R,$$

la cual da para la fuerza, usando la ecuación 9,

$$F = \int_{r-R}^{r+R} dF = \frac{\pi G t \rho m R}{r^2} (4R) = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (10)$$

donde

$$M = 4\pi R^2 t \rho$$

es la masa total del cascarón. La ecuación 10 es exactamente el mismo resultado que obtendríamos para la fuerza entre partículas de masas M y m separadas por una distancia r . Por lo tanto, hemos probado el importante resultado siguiente:

Un cascarón esférico de densidad uniforme atrae a una masa puntual externa como si toda la masa del cascarón estuviese concentrada en su centro.

Una esfera sólida puede considerarse como compuesta de un gran número de cascarones concéntricos. Si cada cascarón esférico tiene una densidad uniforme, aunque diferentes cascarones puedan tener densidades diferentes, se aplica el mismo resultado a la esfera sólida. De aquí que cuerpos como la Tierra, la Luna, o el Sol, en la medida en que son tales esferas, pueden considerarse gravitatoriamente como partículas puntuales para cuerpos afuera de ellos.

Téngase en cuenta que nuestra demostración se aplica solamente a esferas y únicamente cuando la densidad de la esfera es uniforme o es una función del radio únicamente.

Fuerza sobre una partícula interior

Demostraremos ahora otro importante resultado: la fuerza ejercida por un cascarón esférico sobre una partícula situada en su interior es cero. La figura 9 muestra a la partícula situada en el punto P adentro del cascarón. Nótese que r es ahora más pequeño que R . La integración sobre x , ahora con los límites $R - r$ a $r + R$, da

$$\int_{R-r}^{r+R} \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx = \left[\frac{-(r^2 - R^2)}{x} + x \right]_{R-r}^{r+R} = 0,$$

y por lo tanto $F = 0$. Así pues, obtenemos otro resultado general:

Un cascarón esférico uniforme de materia no ejerce ninguna fuerza gravitatoria sobre una partícula ubicada dentro de él.

Este último resultado, aunque no sea obvio, es aceptable porque los elementos de masa del cascarón a la izquierda y a la derecha de m en la figura 9 ejercen ahora fuerzas en direcciones opuestas sobre m . Existe más masa a la izquierda que mueve a

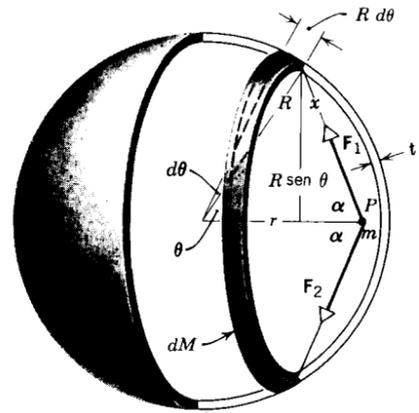


Figura 9 Atracción gravitatoria de una sección de un cascarón esférico de materia sobre una partícula de masa m situada en un punto P adentro del cascarón.

m hacia la izquierda, pero la masa más pequeña de la derecha está más cerca de m ; los dos efectos se cancelan exactamente sólo si la fuerza varía precisamente según un cuadrado inverso de la distancia que separa a las dos partículas. (Véase el problema 29.) En los capítulos sobre electricidad se estudiarán las importantes consecuencias de este resultado. Allí veremos que la fuerza eléctrica entre partículas cargadas depende también inversamente del cuadrado de la distancia entre ellas.

El resultado anterior para una partícula situada adentro de un cascarón esférico implica que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre una partícula disminuye a medida que la partícula se halle a mayor profundidad en la Tierra, suponiendo para ésta una densidad constante. A medida que la partícula esté a mayor profundidad, más masa de la Tierra estará en cascarones que son externos a la posición de la partícula, y la fuerza neta sobre la partícula de esos cascarones es cero. La fuerza gravitatoria se convierte en cero en el centro de la Tierra. De aquí que g tendría un máximo en la superficie de la Tierra y decrecería tanto hacia afuera como hacia adentro de ese punto si la Tierra tuviese una densidad constante. ¿Puede usted imaginar una distribución esférica simétrica de la masa de la Tierra que no diese este resultado? (Véase el problema 26.)

Problema muestra 4 Supongamos que pudiera cavarse un túnel que atravesara la Tierra a lo largo de su diámetro, como se muestra en la figura 10. (a) Demuestre que el movimiento de una partícula dejada caer adentro del túnel es un movimiento armónico simple. Desprecie todas las fuerzas de fricción y suponga que la Tierra tiene una densidad uniforme. (b) Si se entregara el correo a través de este tubo, ¿cuánto tiempo transcurriría entre el depósito en un extremo y la entrega en el otro extremo?

Solución (a) La atracción gravitatoria de la Tierra sobre la partícula situada a una distancia r del centro de la Tierra proviene enteramente de esa porción de materia de la Tierra situada en cascarones internos a la posición de la partícula. Los cascarones externos no ejercen ninguna fuerza sobre la partícula. Supongamos que la densidad de la Tierra es uniforme con un valor ρ . Entonces la masa M' adentro de una esfera de radio r y volumen V' es

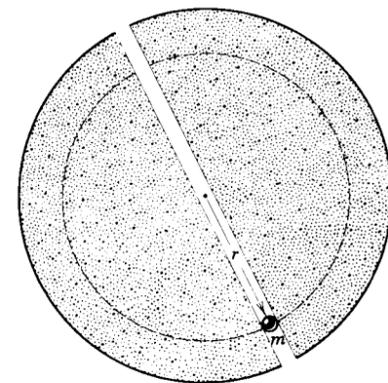


Figura 10 Problema muestra 4. Una partícula se mueve en un túnel que atraviesa la Tierra.

$$M' = \rho V' = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$$

Para propósitos gravitatorios, esta masa puede ser tratada como si estuviese concentrada en el centro de la Tierra. De aquí que la componente radial de la fuerza sobre la partícula de masa m sea

$$F = -\frac{GM'm}{r^2}$$

El signo menos indica que la fuerza es de atracción y, por tanto, dirigida hacia el centro de la Tierra.

Sustituyendo a M' , obtenemos

$$F = -G \frac{\rho 4\pi r^3 m}{3r^2} = -\left(G\rho \frac{4\pi m}{3}\right) r = -kr$$

Aquí $G\rho 4\pi m/3$ es una constante, a la cual hemos llamado k . Por lo tanto, la fuerza es proporcional al desplazamiento r pero directamente opuesta. Éste es exactamente el criterio del movimiento armónico simple.

(b) El periodo de este movimiento armónico simple es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{G\rho 4\pi m}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Siendo $\rho = 5.51 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, tenemos

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.51 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)}} = 5060 \text{ s} = 84.4 \text{ min.}$$

El tiempo para la entrega es medio periodo, o unos 42 min. Este tiempo es independiente de la masa del correo. Puede demostrarse que resultaría el mismo periodo si el túnel fuera cavado a lo largo de cualquier cuerda en lugar de a lo largo del diámetro.

La densidad de la Tierra no es en realidad uniforme. ¿Cuál sería en este problema el efecto si hiciéramos que ρ fuese alguna función de r , en lugar de ser una constante?

Prueba de la ley del inverso de los cuadrados

Como lo discutiremos en la sección 16-8, las leyes de Kepler dan evidencia directa de una fuerza gravitatoria $1/r^2$. Por lo tanto

podemos considerar a la ley $1/r^2$ como bien comprobada para distancias del orden de tamaño del sistema solar (10^{13} m). La teoría general de la relatividad de Einstein explica pequeñas excepciones en el movimiento de los planetas interiores; esta teoría reemplaza a la ley de Newton cuando la fuerza gravitatoria es intensa, pero se reduce a la ley de Newton cuando la fuerza es más débil; véase la sección 16-10.

Por lo tanto, nos gustaría probar la ley $1/r^2$ para las distancias de laboratorio. A causa de que la fuerza es tan débil, es difícil hacer tal prueba repitiendo el experimento de Cavendish con separaciones diferentes entre las masas. Un método más preciso hace uso del anulamiento de la fuerza gravitatoria sobre una partícula de prueba situada dentro de un cascarón esférico. Si pudiéramos aislar a una partícula de prueba, digamos en un brazo de una balanza de torsión, y luego rodearla con un cascarón esférico, cualquier ligera rotación de la balanza cuando la partícula de prueba se moviese dentro del cascarón indicaría una desviación de la ley $1/r^2$. La rotación podría ser detectada por un mecanismo apropiado unido al otro brazo de la balanza.

Desafortunadamente, rodear una masa de prueba con un cascarón esférico y moverla en su interior presenta grandes dificultades técnicas; como alternativa se usa un cilindro largo. Partiendo de un cálculo parecido al que usamos para el cascarón esférico, puede demostrarse que la fuerza gravitatoria ejercida por un cilindro largo hueco sobre una masa de prueba situada en el interior del cilindro se anula si el cilindro es infinitamente largo; para un cilindro de longitud finita puede aplicarse una pequeña pero fácilmente calculable corrección.

La figura 11 muestra la geometría de un experimento típico. Al moverse la masa de prueba en un plano horizontal, se detectarían con la balanza de torsión las variaciones en la fuerza gravitatoria entre el cilindro y la masa de prueba. Si la fuerza gravitatoria entre las partículas tuviera una variación diferente de $1/r^2$, la fuerza sobre la masa de prueba no se anularía y variaría al moverse la masa de prueba en el plano horizontal.

Tales experimentos demuestran que la fuerza tiene realmente la forma $1/r^2$ en dimensiones de laboratorio (centímetros o metros). Una manera de expresar los resultados de estos experimentos es suponer que la fuerza tiene la forma $1/r^{2+\delta}$, donde $\delta = 0$ en la teoría Newtoniana, y luego demostrar que el experimento fija un pequeño límite superior sobre δ . El límite superior actual sobre δ es alrededor de 10^{-4} ; con la mejor precisión obtenible de los estudios de laboratorio, parece no haber desviación de la forma $1/r^2$ de la ley de la gravitación. Por comparación, los experimentos de prueba de la fuerza $1/r^2$ entre cargas eléctricas (véase la sección 29-6) señalan un límite superior de alrededor de 10^{-16} sobre δ en este caso. ■

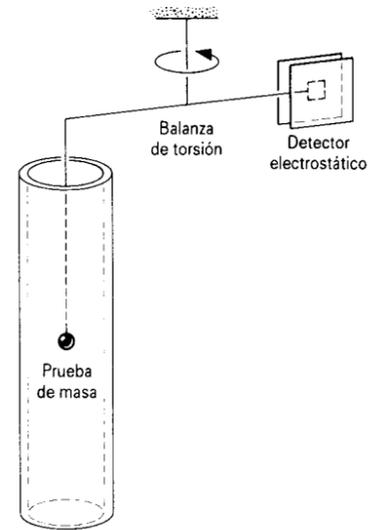


Figura 11 Una masa de prueba en el interior de un cilindro largo. Para una fuerza $1/r^2$, la atracción gravitatoria entre la masa de prueba y el cilindro se anularía (despreciando los efectos de los extremos). Una balanza de torsión permite medir cambios en la fuerza que actúa sobre la masa de prueba en diferentes lugares en el interior del cilindro.

La ecuación 4 del capítulo 8, la cual podemos escribir como

$$\Delta U = U_b - U_a = -W_{ab}$$

define el cambio ΔU en la energía potencial de cualquier sistema, en el cual actúe una fuerza conservativa (digamos, la gravedad), cuando el sistema cambia de la configuración a a la configuración b . W_{ab} es el trabajo efectuado por esa fuerza conservativa cuando el sistema cambia.

La energía potencial del sistema en una configuración arbitraria b es

$$U_b = -W_{ab} + U_a \quad (11)$$

Para dar un valor a U_b elegimos que la configuración a sea una configuración de referencia acordada, y le asignamos a U_a un valor de referencia arbitrario, usualmente cero. Por ejemplo, en el capítulo 8 hemos considerado la energía potencial de una partícula sometida a la fuerza de gravedad mg cerca de la superficie de la Tierra. A una altura y , la energía potencial es $U(y) = mgy$, donde el valor de referencia $U = 0$ se toma en $y = 0$.

Consideraremos ahora el caso más general de dos partículas de masas m y M separadas por una distancia r . Inicialmente, las partículas están separadas por r_a , y la separación cambia a r_b . Para hallar el cambio ΔU correspondiente en la energía potencial debemos evaluar a W_{ab} de acuerdo con la ecuación 11. La figura 12 muestra el esquema geométrico. Hagamos que M esté en el origen de las coordenadas, y movamos a m hacia M . Nótese que

16-6 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

En el capítulo 8 hemos tratado la energía potencial gravitatoria de una partícula (masa m) y de la Tierra (masa M). Consideramos únicamente el caso especial en que la partícula permanece cerca de la Tierra de modo que podríamos suponer que la fuerza gravitatoria que actúa sobre la partícula es de magnitud mg constante. En esta sección eliminamos esa restricción y consideramos las separaciones partícula-Tierra que pueden ser apreciablemente más grandes que el radio de la Tierra.

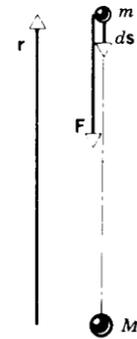


Figura 12 Una partícula M ejerce una fuerza gravitatoria F sobre una partícula de masa m situada en r . La partícula de masa m se desplaza una corta distancia ds .

r y ds (el vector de desplazamiento) están en direcciones opuestas, de modo que $ds = -dr$. El trabajo efectuado por F cuando la partícula se mueve de a a b es

$$W_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_a^b F dr$$

$$= - \int_{r_a}^{r_b} \frac{GmM}{r^2} dr = -GmM \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2}$$

$$= -GmM \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_a}^{r_b} = GmM \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right). \quad (12)$$

Entonces

$$\Delta U = -W_{ab} = GmM \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \quad (13)$$

Elegimos que nuestra configuración de referencia sea una separación infinita de las partículas ($r_a \rightarrow \infty$), y definimos $U(\infty)$ igual a cero. A una separación r arbitraria, la energía potencial es

$$U(r) = -W_{\infty r} + 0 \quad (14)$$

o

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (15)$$

El signo menos indica que la energía potencial es negativa en cualquier distancia finita; esto es, la energía potencial es cero en el infinito y disminuye al disminuir la distancia de separación. Esto corresponde al hecho de que la fuerza gravitatoria ejercida sobre m por M es de atracción. Cuando la partícula se acerca desde el infinito, el trabajo $W_{\infty r}$ efectuado por esta fuerza sobre la partícula es positivo, lo cual significa, basados en la ecuación 14, que $U(r)$ es negativa.

La ecuación 15 se cumple para cualquier trayectoria seguida por la partícula al moverse desde el infinito al radio r . Podemos demostrarlo dividiendo una trayectoria arbitraria cualquiera en porciones escalonadas, las cuales

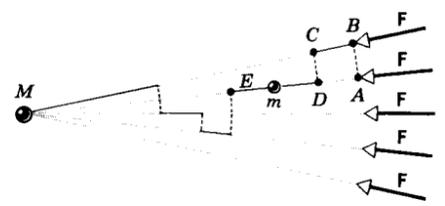


Figura 13 El trabajo efectuado al llevar a una partícula desde A hasta E es independiente de la trayectoria.

se trazan alternativamente a lo largo del radio y perpendiculares a él. (Fig. 13.) No se efectúa ningún trabajo a lo largo de segmentos perpendiculares como AB , porque a lo largo de ellos la fuerza es perpendicular al desplazamiento. El trabajo total efectuado a lo largo de todas las partes radiales de la trayectoria, una de las cuales es BC , es igual al trabajo efectuado al ir directamente a lo largo de una trayectoria radial como AE . El trabajo efectuado por la fuerza gravitatoria al moverse la partícula entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria real que une a estos puntos. De aquí que la fuerza gravitatoria sea una fuerza conservativa.

La ecuación 15 demuestra que la energía potencial es una propiedad del sistema consistente en las dos partículas M y m , más bien que de cualquier cuerpo aislado. La energía potencial cambia si se desplazan M o m ; sobre cada una actúa la fuerza gravitatoria de la otra. Tampoco tiene ningún sentido asignar parte de la energía potencial a M y parte a m . Sin embargo, a menudo hablamos de la energía potencial de un cuerpo m (digamos, un planeta o una piedra) sobre el que actúa una fuerza gravitatoria de un cuerpo M mucho más masivo (el Sol o la Tierra, respectivamente). La justificación para hablar como si la energía potencial perteneciera al planeta o a la piedra únicamente es ésta: cuando la energía potencial de un sistema de dos cuerpos cambia a energía cinética, el cuerpo más ligero adquiere la mayor parte de la energía cinética. El Sol es mucho más masivo que un planeta, de modo que difícilmente adquirirá algo de la energía cinética; y lo mismo sucede con la Tierra en el sistema Tierra-piedra.

Podemos invertir el cálculo anterior y derivar la fuerza gravitatoria a partir de la energía potencial. En las funciones de energía potencial esféricamente simétricas, la relación $F = -dU/dr$ da la componente radial de la fuerza; véase la ecuación 13 del capítulo 8. Con la energía potencial de la ecuación 15, obtenemos

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{GMm}{r} \right) = -\frac{GMm}{r^2}. \quad (16)$$

El signo menos muestra aquí que la fuerza es de atracción, dirigida hacia adentro a lo largo del radio.

Podemos demostrar que la energía potencial definida por la ecuación 13 conduce a la conocida expresión mgy para una diferencia pequeña en elevación y cerca de la

superficie de la Tierra. Evaluemos la ecuación 13 para la diferencia en energía potencial entre la ubicación a una altura y sobre la superficie (esto es, $r_b = R_T + y$, donde R_T es el radio de la Tierra) y en la superficie ($r_a = R_T$):

$$\Delta U = U(R_T + y) - U(R_T) = GM_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + y} \right)$$

$$= \frac{GM_T m}{R_T} \left(1 - \frac{1}{1 + y/R_T} \right).$$

Cuando $y \ll R_T$, que sería el caso para desplazamientos pequeños de los cuerpos cerca de la superficie de la Tierra, podemos usar la expansión binomial para aproximar el último término como $(1 + x)^{-1} = 1 - x + \dots \approx 1 - x$, lo cual nos da

$$\Delta U \approx \frac{GM_T m}{R_T} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{R_T} \right) \right] = \frac{GM_T m y}{R_T^2} = mgy,$$

usando la ecuación 3 para reemplazar a GM_T/R_T^2 por g . Esto demuestra que la ecuación 13 para la diferencia en la energía potencial gravitatoria es consistente con nuestro uso anterior de mgy para situaciones cerca de la superficie de la Tierra. De hecho, podemos usar la aproximación $\Delta U = mgy$ para la diferencia en la energía potencial entre dos alturas a cualquier distancia R del centro de la Tierra, en tanto que $y \ll R$ y usemos el valor de g (véase la tabla 1) apropiado para ese R .

Problema muestra 5 ¿Cuál es la energía potencial gravitatoria del sistema Luna-Tierra, respecto a la energía potencial a una separación infinita?

Solución Las masas de la Tierra y de la Luna son de 5.98×10^{24} kg y 7.36×10^{22} kg, respectivamente, y su distancia de separación media d es de 3.82×10^8 m. Entonces, según la ecuación 15:

$$U = -\frac{GMm}{d}$$

$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(7.36 \times 10^{22} \text{ kg})}{3.82 \times 10^8 \text{ m}}$$

$$= -7.68 \times 10^{28} \text{ J}.$$

Una energía de esta magnitud es aproximadamente igual a la producción de energía industrial mundial, a su tasa actual, durante aproximadamente 10^8 años.

Problema muestra 6 ¿Qué velocidad inicial mínima deberá tener un proyectil en la superficie de la Tierra para escapar de la Tierra? Desprecie los efectos causados por la fricción atmosférica y la rotación terrestre.

Solución Un proyectil disparado hacia arriba usualmente irá perdiendo velocidad, llegará momentáneamente al reposo, y retornará a la Tierra. Sin embargo, con una cierta velocidad inicial se moverá hacia arriba para siempre, llegando al reposo solamente en el infinito.

Consideremos un proyectil tal, de masa m , que deja la superficie de la Tierra a esta velocidad inicial crítica v . Tiene una

TABLA 2 CIERTAS VELOCIDADES DE ESCAPE

Cuerpo	Masa (kg)	Radio (m)	Velocidad de escape (km/s)
Ceres [†]	1.17×10^{21}	3.8×10^5	0.64
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^6	2.38
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^6	11.2
Júpiter	1.90×10^{27}	7.15×10^7	59.5
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^8	618
Sirio B [‡]	2×10^{30}	1×10^7	5200
Una estrella neutrón	2×10^{30}	1×10^4	2×10^5

[†] El más masivo de los asteroides.

[‡] Una enana blanca, la compañera de la brillante estrella Sirio.

energía cinética K dada por $\frac{1}{2}mv^2$ y una energía potencial U dada por la ecuación 15, es decir,

$$U(R_T) = -\frac{GM_T m}{R_T},$$

donde M_T es la masa de la Tierra y R_T su radio.

Cuando el proyectil haya llegado al infinito, no tendrá energía cinética (recuerde que buscamos la velocidad mínima para el escape) ni tampoco energía potencial (recuerde que ésta es nuestra configuración energía-potencial-cero). Por lo tanto, su energía total en el infinito es cero. A partir de la conservación de la energía, su energía total en la superficie debe ser también cero, es decir,

$$K + U = 0.$$

Esto nos conduce a

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GM_T m}{R_T} \right) = 0,$$

o sea

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}. \quad (17)$$

Sustituyendo valores en la ecuación 17 nos da

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{6.37 \times 10^6 \text{ m}}}$$

$$= 1.12 \times 10^4 \text{ m/s} = 11.2 \text{ km/s} = 25,000 \text{ mi/h}.$$

La velocidad de escape no depende de la dirección en que se dispare el proyectil. Sin embargo, la rotación de la Tierra, que hasta ahora hemos despreciado, sí juega un papel. Dispararlo hacia el este tiene la ventaja de que la velocidad superficial tangencial de la Tierra, la cual es de 0.46 km/s en Cabo Cañaveral, puede restarse del valor calculado con la ecuación 17. La tabla 2 muestra velocidades de escape para la Tierra y para algunos otros cuerpos.

Energía potencial de sistemas de muchas partículas

Consideremos ahora otra interpretación de $U(r)$. Supondremos que equilibramos la fuerza gravitatoria con una fuerza externa aplicada por algún agente externo, y la dispondremos de modo que, en todo momento, esta fuerza

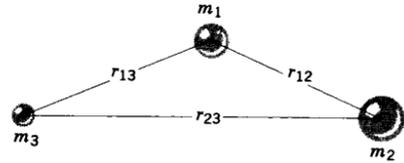


Figura 14 Tres masas reunidas desde el infinito.

externa sea igual y opuesta a la fuerza gravitatoria de cada partícula. (Por ejemplo, mantenemos a cada partícula en nuestra mano y la movemos en equilibrio.) El trabajo efectuado por la fuerza externa cuando las partículas se mueven desde una separación infinita a la separación r no es W_{ext} , sino $-W_{\text{ext}}$; esto se debe a que los desplazamientos son los mismos pero las fuerzas son iguales y opuestas. Entonces podemos interpretar la ecuación 14 como sigue:

La energía potencial de un sistema de partículas es igual al trabajo que debe efectuar un agente externo para armar el sistema, a partir de la configuración estándar de referencia.

Así pues, si usted levanta una piedra de masa m a una distancia r y sobre la superficie de la Tierra, usted es el agente externo (que separa a la piedra de la Tierra) y el trabajo que usted hace para "armar el sistema" es $+mgy$, lo cual es también la energía potencial. Del mismo modo, el trabajo efectuado por el agente externo, cuando un cuerpo de masa m se mueve desde el infinito hasta una distancia r de la Tierra, es *negativo* porque el agente debe ejercer una fuerza restrictiva sobre el cuerpo; esto va de acuerdo con la ecuación 14.

Estas consideraciones se cumplen también para sistemas que contienen más de dos partículas. Consideremos tres cuerpos de masas m_1 , m_2 , y m_3 . Supondremos que, inicialmente, están en reposo infinitamente lejos una de otra. El problema es calcular el trabajo efectuado por un agente externo que las lleve a las posiciones que se muestran en la figura 14. Primero, traemos a m_1 desde el infinito hasta su posición final. La gravedad o un agente externo no efectúan ningún trabajo porque la separación entre las tres partículas permanece infinita. Traigamos luego a m_2 hacia m_1 desde una separación infinita hasta la separación r_{12} . El trabajo efectuado por el agente externo al oponerse a la fuerza gravitatoria ejercida por m_1 sobre m_2 es $-Gm_1m_2/r_{12}$. Traigamos ahora a m_3 desde el infinito hasta la separación r_{13} desde m_1 y r_{23} desde m_2 . El trabajo efectuado por el agente externo al oponerse a la fuerza gravitatoria ejercida por m_1 sobre m_3 es $-Gm_1m_3/r_{13}$, y la que se opone a la fuerza gravitatoria ejercida por m_2 sobre m_3 es $-Gm_2m_3/r_{23}$. La energía potencial total de este sistema es igual al trabajo total efectuado por el agente externo para armar el sistema, es decir,

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \quad (18)$$

Nótese que no se necesitan cálculos vectoriales con este método.

No importa cómo armemos el sistema, es decir, independientemente del orden en que se muevan las partículas o de las trayectorias que sigan, siempre hallamos esta misma cantidad para el trabajo requerido para traer a los cuerpos a la configuración de la figura 14 desde una separación infinita inicial. La energía potencial debe, por lo tanto, estar asociada al sistema más bien que con uno o dos cuerpos cualesquiera. Si quisiéramos separar al sistema en tres masas aisladas una vez más, tendríamos que proporcionar una cantidad de energía

$$E = +\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right).$$

Esta energía se considera como la *energía de descarga* o también de sujeción, porque mantiene a las partículas juntas entre sí en la configuración mostrada. En el problema muestra 5, por ejemplo, hallamos que la energía potencial del sistema Tierra-Luna era -7.68×10^{28} J, y, por lo tanto, la energía de sujeción del sistema Tierra-Luna es de 7.68×10^{28} J. Ésta es la cantidad de energía que un agente externo debe proporcionar para mover a la Tierra y a la Luna desde su separación actual hasta una separación infinita, en un sistema aislado que conste únicamente de Tierra y Luna (despreciando en este cálculo el importante efecto del Sol).

Estos conceptos se presentan de nuevo en relación con fuerzas de origen eléctrico o magnético, o, bien, de origen nuclear. Su aplicación es bastante amplia en la física. Una ventaja del método de la energía sobre el método dinámico consiste en que el primero emplea cantidades escalares y operaciones con escalares en lugar de cantidades vectoriales y operaciones con vectores. Cuando no se conocen las fuerzas reales, como a menudo sucede en física nuclear, el método de la energía es esencial.

16-7 EL CAMPO GRAVITATORIO Y EL POTENCIAL (Opcional)

Un hecho básico de la gravitación es que dos partículas ejercen sobre ellas fuerzas mutuas. Podemos considerar esto como una interacción directa entre las dos partículas, si lo deseamos. Este punto de vista se denomina *acción-a-distancia*, según el cual las partículas interactúan aunque no estén en contacto. Otro punto de vista es el concepto de *campo*, que considera que una partícula modifica de algún modo al espacio alrededor de ella y genera un *campo gravitatorio*. Este campo, cuya intensidad depende de la masa de la partícula, actúa entonces sobre cualquier otra partícula, ejerciendo la fuerza de atracción gravitatoria sobre ella. Por lo tanto, el campo desempeña un papel intermedio en nuestro pensamiento sobre las fuerzas entre partículas.

De acuerdo con este punto de vista tenemos dos partes separadas en nuestro problema. Primero, debemos determinar el campo gravitatorio generado por una distribución dada de partículas. Segundo, debemos calcular la fuerza gravitatoria que ejerce este campo sobre otra partícula situada en él.

Usaremos este mismo enfoque más adelante en nuestro texto cuando estudiemos el electromagnetismo, en cuyo caso partículas con carga eléctrica generan un campo *eléctrico*, y la fuerza sobre otra partícula cargada se determina por la intensidad del campo eléctrico en el punto donde se encuentre la partícula.

Consideremos a la Tierra como una partícula aislada y despreciemos todos los efectos rotatorios y otros que no sean los gravitatorios. Utilizamos un pequeño cuerpo de prueba de masa m_0 como una sonda del campo gravitatorio. Si este cuerpo se coloca en la vecindad de la Tierra, experimentará una fuerza que tiene una dirección y una magnitud definidas en cada punto situado en el espacio. La dirección es radial hacia el centro de la Tierra, y la magnitud es m_0g . Podemos asociar un vector \mathbf{g} con cada punto cerca de la Tierra, el cual es la aceleración que ese cuerpo experimentaría si se dejara caer en ese punto. Definimos a la *intensidad del campo gravitatorio* en un punto como la *fuerza gravitatoria por unidad de masa* en ese punto o, en términos de nuestra masa de prueba,

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m_0}. \quad (19)$$

Al mover a la masa de prueba a varias posiciones, podemos hacer un mapa que muestre al campo gravitatorio en cualquier punto en el espacio. Entonces podremos hallar la fuerza sobre una partícula situada en cualquier punto de ese campo multiplicando la masa m de la partícula por el valor del campo gravitatorio \mathbf{g} en ese punto: $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$.

El campo gravitatorio es un ejemplo de un *campo vectorial*, teniendo cada punto situado en este campo un vector asociado con él. Existen también *campos escalares*, como el campo de temperatura en un sólido conductor del calor. El campo gravitatorio que surge de una distribución de materia fija es también un ejemplo de un *campo estático*, porque el valor del campo en un punto dado no cambia con el tiempo.

El concepto de campo es particularmente útil para entender las fuerzas electromagnéticas entre cargas eléctricas en movimiento. Tiene claras ventajas, tanto conceptualmente como en la práctica, sobre el concepto de acción-a-distancia. El concepto de campo es particularmente superior en el análisis de las ondas electromagnéticas (por ejemplo, las ondas de luz o las ondas de radio); la acción-a-distancia sugiere que las fuerzas pueden ser transmitidas instantáneamente a cualquier distancia, mientras que en teorías basadas en campos las fuerzas se propagan con una velocidad finita (cuando más a la velocidad de la luz). Las ondas gravitatorias (véase la sección 16-10), que, aunque se sabe que existen no han podido observarse directamente, serían de igual manera difíciles de entender con la teoría de la acción-a-distancia. El concepto de campo, que no se utilizó en la época de Newton, fue desarrollado mucho más tarde por Faraday para el electromagnetismo y sólo entonces aplicado a la gravitación. Posteriormente, este punto de vista fue adoptado para la gravitación en la teoría general de la relatividad. Todas las teorías actuales que tratan de la naturaleza última de la materia y de las interacciones entre las partículas fundamentales son teorías de campo de una clase u otra.

Podemos también describir al campo gravitatorio de un cuerpo por una función escalar llamada *potencial*. (El potencial no es lo mismo que la energía potencial, aunque estén íntimamente relacionados.) Una vez más medimos la intensidad del campo usando una partícula de prueba de masa m_0 . Comencemos con

la partícula de prueba con una separación infinita del cuerpo (donde el campo es cero) y movamos a la partícula de prueba hacia el cuerpo hasta que la separación sea r , donde la energía potencial es $U(r)$. Luego, definimos el *potencial gravitatorio* V en ese punto como:

$$V(r) = \frac{U(r)}{m_0}. \quad (20)$$

Es decir, el potencial es lo mismo que la *energía potencial por unidad de masa de prueba*. Nótese que el potencial es un escalar, siendo definido como la razón de los escalares U y m .

Por ejemplo, la energía potencial de m_0 en el campo de un cuerpo esféricamente simétrico de masa M está dada por la ecuación 15 como $U(r) = -GMm_0/r$. El potencial gravitatorio puede entonces hallarse empleando la ecuación 20:

$$V(r) = \frac{U(r)}{m_0} = -\frac{GM}{r}. \quad (21)$$

Nótese que el potencial $V(r)$ es independiente del valor de la masa de prueba m_0 ; de igual manera, el campo gravitatorio \mathbf{g} , definido de acuerdo con la ecuación 19, es independiente de m_0 .

Del mismo modo en que podemos hallar la componente radial de la fuerza \mathbf{F} a partir de $U(r)$ de acuerdo con $F = -dU/dr$, podemos hallar también la componente radial del campo \mathbf{g} a partir de $V(r)$ de acuerdo con $g = -dV/dr$. Por lo tanto, podemos considerar el campo y el potencial como modos alternos de analizar la gravitación; de un modo similar, la fuerza y la energía potencial pueden adoptarse como modos alternos de describir la dinámica de un sistema. ■

16-8 LOS MOVIMIENTOS DE PLANETAS Y SATÉLITES

Mediante las leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal de Newton, podemos entender y analizar el comportamiento de todos los cuerpos en el sistema solar: las órbitas de los planetas y de los cometas con respecto al Sol y de los satélites naturales o artificiales con respecto a sus planetas. Adoptamos dos hipótesis que simplifiquen el análisis: (1) consideramos a la fuerza gravitatoria solamente entre el cuerpo en órbita (la Tierra, por ejemplo) y el cuerpo central (el Sol), ignorando el efecto perturbador de la fuerza gravitatoria de otros cuerpos (tales como otros planetas); (2) suponemos que el cuerpo central es más masivo que el cuerpo en órbita de modo que podemos despreciar su movimiento bajo su interacción mutua. En realidad, ambos objetos orbitan con respecto a su centro de masa común, pero si un objeto es mucho más masivo que el otro, el centro de masa está aproximadamente en el centro del cuerpo más masivo. Se señalarán las excepciones a esta segunda hipótesis.

La base empírica para entender los movimientos de los planetas son las tres leyes de Kepler, y ahora demostraremos cómo pueden relacionarse estas leyes con los resultados analíticos de las leyes de Newton:

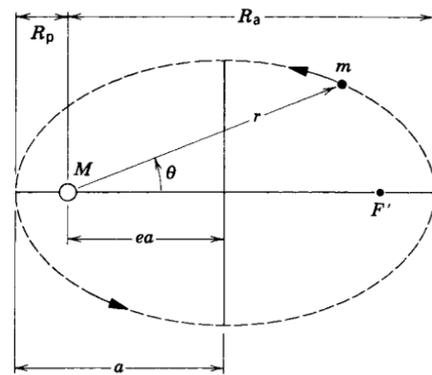


Figura 15 Un planeta de masa m se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. El Sol, de masa M , está en uno de los focos de la elipse. F' se encuentra en el otro foco "vacío". Se muestran también el semieje mayor a de la elipse, el perihelio R_p , y el afelio R_a . La distancia ea localiza a los puntos focales, siendo e la excentricidad de la órbita.

1. **La ley de las órbitas:** Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas teniendo al Sol como uno de los focos. Newton fue el primero en darse cuenta que existe una relación matemática directa entre el inverso de los cuadrados de las fuerzas ($1/r^2$) y las órbitas elípticas. La figura 15 muestra una órbita elíptica típica. El origen de las coordenadas está en el cuerpo central, y el cuerpo que gira en torno está localizado en las coordenadas polares r y θ . La órbita se halla descrita por dos parámetros: el *semieje mayor* a y la *excentricidad* e . La distancia desde el centro de la elipse a cualquiera de los focos es ea . Una órbita circular es un caso especial de una órbita elíptica con $e = 0$, en cuyo caso los dos focos se funden en un solo punto situado en el centro del círculo. Para los planetas del sistema solar, las excentricidades son pequeñas y las órbitas son casi circulares, como se muestra en el apéndice C.

La distancia máxima R_a del cuerpo en órbita al cuerpo central se indica con el prefijo griego *apo*, que significa lejos, como en *afelio* (que proviene de apo (lejos) y helios (Sol) y que significa la distancia máxima desde el Sol) o en *apogeo* (que significa la distancia máxima desde la Tierra). De igual manera, la distancia más cercana R_p está indicada por el prefijo *peri*, como en *perihelio* o en *perigeo*. Como podemos ver en la figura 15, $R_a = a(1 + e)$ y $R_p = a(1 - e)$. Para órbitas circulares, $R_a = R_p = a$.

2. **La ley de las áreas:** Una línea que une a cualquier planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales. La figura 16a ilustra esta ley; en efecto, dice que el cuerpo en órbita se mueve más rápidamente cuando está cerca del cuerpo central que cuando está lejos. Demostraremos ahora que la ley de las áreas es idéntica a la ley de conservación del ímpetu angular.

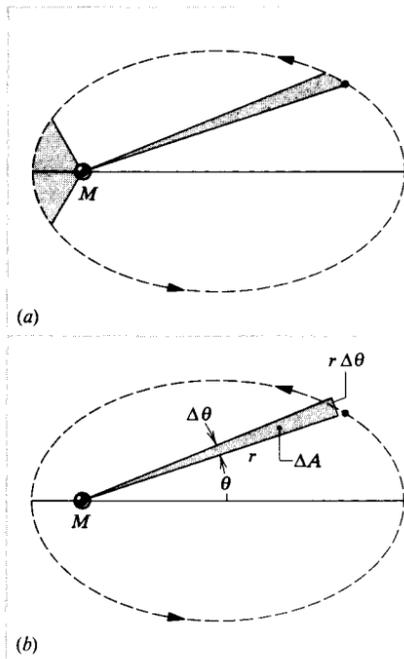


Figura 16 (a) Las áreas iguales sombreadas son barridas en tiempos iguales por una línea que une al planeta con el Sol, demostrando la ley de las áreas. (b) El área ΔA es barrida en un tiempo Δt , durante el cual la línea barre un ángulo $\Delta\theta$.

Consideremos el pequeño incremento de área ΔA barrido en un intervalo de tiempo Δt , como se muestra en la figura 16b. El área de esta cuña aproximadamente triangular es la mitad de su base $r \Delta\theta$, por su altura r . La tasa a la cual esta área es barrida es $\Delta A/\Delta t = \frac{1}{2}(r \Delta\theta)(r)/\Delta t$. En el límite instantáneo esto resulta ser

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \omega.$$

El ímpetu angular instantáneo del cuerpo que orbita es $L = mr^2\omega$, y entonces

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}. \quad (22)$$

En la medida en que podamos considerar a los dos cuerpos como un sistema aislado, L es una constante, y, por lo tanto, dA/dt es una constante. Por lo tanto, el aumento en la velocidad de un cometa que al pasar cerca del Sol es precisamente una demostración de la conservación del ímpetu angular.

Debe observarse que la conservación del ímpetu angular es válida para cualquier fuerza central, es decir, para cualquier fuerza que actúe a lo largo de una línea que une a dos partículas y que dependa solamente de la magnitud de la separación entre dos partículas. Obsérvese también que, al verificar la ley de las áreas, no hemos empleado la ley

TABLA 3 LEY DE LOS PERIODOS DE KEPLER PARA EL SISTEMA SOLAR

Planeta	Semieje mayor a (10^{10} m)	Periodo T (y)	T^2/a^3 (10^{-34} y^2/m^3)
Mercurio	5.79	0.241	2.99
Venus	10.8	0.615	3.00
Tierra	15.0	1.00	2.96
Marte	22.8	1.88	2.98
Júpiter	77.8	11.9	3.01
Saturno	143	29.5	2.98
Urano	287	84.0	2.98
Neptuno	450	165	2.99
Plutón	590	248	2.99

del inverso de los cuadrados; la validez de la ley de las áreas no nos dice nada con respecto a cómo varía F con r .

3. **La ley de los periodos:** El cuadrado del periodo de cualquier planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol. Probemos este resultado en órbitas circulares. La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r. \quad (23)$$

Reemplazando a ω por $2\pi/T$, obtenemos

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3. \quad (24)$$

Se obtiene un resultado similar para órbitas elípticas, con el radio r reemplazado por el semieje mayor a .

Las relación entre T^2 y a^3 debe estar determinada por la cantidad $4\pi^2/GM$. Para todos los planetas que giran en torno al Sol, la razón T^2/a^3 debe ser una constante; la tabla 3 muestra que éste es, en efecto, el caso. Si podemos medir T y a para un cuerpo en órbita, podemos determinar la masa del cuerpo central. Este procedimiento es independiente de la masa del cuerpo que orbita, y así no nos da información con respecto a su masa.

Problema muestra 7 (a) Calcule la masa del Sol a partir del periodo y del radio de la órbita de la Tierra. (b) Calcule la masa de Júpiter a partir del periodo (1.77 d) y radio (4.22×10^5 km) de su segunda luna más cercana, Io.

Solución (a) Partiendo de la ecuación 24, tenemos

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (1.50 \times 10^{11} \text{ m})^3}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(3.15 \times 10^7 \text{ s})^2} = 2.01 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

(b)

$$M = \frac{4\pi^2 (4.22 \times 10^8 \text{ m})^3}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1.53 \times 10^5 \text{ s})^2} = 1.90 \times 10^{27} \text{ kg}.$$



Figura 17 El cometa Halley, fotografiado durante su acercamiento al Sol en 1986.

Nótese que la masa de Júpiter no puede ser obtenida de los parámetros de su órbita alrededor del Sol; para determinar la masa de un objeto a partir de la tercera ley de Kepler, necesitamos conocer el periodo y el semieje mayor de objetos que giren en torno a él como cuerpo central.

Problema muestra 8 Un satélite gira en órbita a una altura de $h = 230$ km sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuál es el periodo del satélite?

Solución De nuevo al usar la ecuación 24, con $r = R_T + h = 6370 \text{ km} + 230 \text{ km} = 6600 \text{ km}$, obtenemos

$$T = \left(\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi^2 (6.60 \times 10^6 \text{ m})^3}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}\right)^{1/2} = 5330 \text{ s} = 88.9 \text{ min}.$$

Este periodo no es muy dependiente de h cuando h es mucho menor que R_T ; las órbitas de baja altura de los satélites de la Tierra tienen periodos de alrededor de 90 min.

Problema muestra 9 Se desea colocar un satélite de comunicaciones en órbita de modo que permanezca fijo sobre un punto dado en el ecuador de la Tierra en rotación. ¿Cuál es la altura sobre la Tierra de esa órbita?

Solución Para que el satélite permanezca sobre un punto dado de la superficie de la Tierra, debe girar a la misma velocidad angular que el punto. El periodo del satélite debe ser por lo tanto de 24 h, o bien 86,400 s. El radio de la órbita debe entonces ser

$$r = \left(\frac{GT^2 M_T}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(86,400 \text{ s})^2(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4.22 \times 10^7 \text{ m},$$

y su altura sobre la superficie de la Tierra es

$$h = r - R_T = 4.22 \times 10^7 \text{ m} - 6.37 \times 10^6 \text{ m} = 3.58 \times 10^7 \text{ m} = 22,300 \text{ mi}.$$

Esta órbita se denomina la Órbita Geosíncrona Clarke, en honor a Arthur C. Clarke, quien propuso la idea por primera vez en 1948. Clarke también es bien conocido como el autor de

muchos trabajos de ciencia-ficción, incluyendo 2001: *Odisea en el espacio*.

Problema muestra 10 El cometa Halley (Fig. 17) tiene un periodo de 76 años. En 1986, su acercamiento mayor al Sol (perihelio) fue 8.9×10^{10} m (entre las órbitas de Mercurio y Venus). Halle su afelio, o distancia más alejada del Sol, y la excentricidad de su órbita.

Solución Partiendo de la ecuación 24 hallamos el semieje mayor:

$$a = \left(\frac{GT^2M}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(2.4 \times 10^9 \text{ s})^2(2.0 \times 10^{30} \text{ kg})}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 2.7 \times 10^{12} \text{ m}.$$

Según la figura 15, tenemos que $R_a = a - ae$ y $R_p = a + ae$, de modo que

$$R_a + R_p = 2a \\ R_p = 2a - R_a = 2(2.7 \times 10^{12} \text{ m}) - 8.9 \times 10^{10} \text{ m} = 5.3 \times 10^{12} \text{ m},$$

entre las órbitas de Neptuno y Plutón. La excentricidad es

$$e = \frac{R_a - R_p}{2a} = \frac{6.3 \times 10^{12} \text{ m} - 8.9 \times 10^{10} \text{ m}}{2(2.7 \times 10^{12} \text{ m})} = 0.96.$$

Una excentricidad tan grande (1.0 es el máximo posible) corresponde a una elipse larga, aplanada.

Movimiento en torno al centro de masa

La figura 18 muestra, para el caso de órbitas circulares, dos objetos que se mueven en torno a su centro de masa común. Si consideramos el movimiento del cuerpo más pequeño, entonces la ecuación 23 se convierte en

$$\frac{GMm}{(r+R)^2} = m\omega^2 r,$$

y el resultado corregido para la ley de los periodos es

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3 \left(1 + \frac{R}{r} \right)^2. \quad (25)$$

La diferencia entre las ecuaciones 24 y 25 es el factor $(1 + R/r)^2$. En el caso de la Tierra y el Sol,

$$\frac{R}{r} = \frac{m}{M} = \frac{5.98 \times 10^{24} \text{ kg}}{1.99 \times 10^{30} \text{ kg}} = 3.01 \times 10^{-6},$$

y el error cometido al despreciar el factor del centro de masa y aplicar la ley de los periodos es menor de 0.001%. La figura 19, por otra parte, muestra un diagrama de un sistema de estrellas binarias. Aquí los dos objetos tienen masas comparables, y la corrección para el centro de masa es significativa.

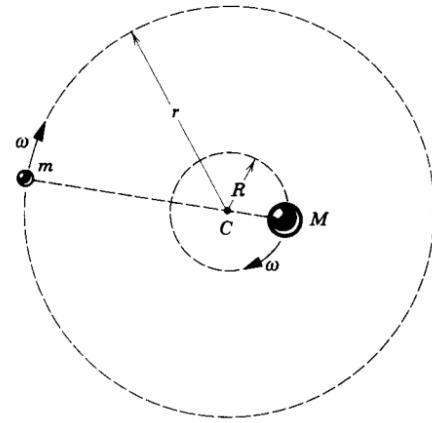


Figura 18 Dos cuerpos se mueven en órbitas circulares bajo la influencia de la atracción gravitatoria entre ellos. Ambos tienen la misma velocidad angular ω . El punto C es su centro de masa.

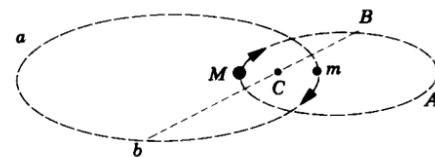


Figura 19 Un sistema de estrellas binarias, en el que cada estrella gira en torno al centro de masa C. Los puntos A y B muestran las posiciones de la estrella de masa M cuando la estrella de masa m está en las posiciones a y b respectivamente.

Consideraciones energéticas en el movimiento de planetas y satélites

Consideremos una vez más el movimiento de un cuerpo de masa m (planeta o satélite, por ejemplo) en torno a un cuerpo masivo de masa M (el Sol o la Tierra, por ejemplo). Consideraremos que M está en reposo en un marco de referencia inercial con el cuerpo m moviéndose con respecto a él en una órbita circular. La energía potencial del sistema es

$$U(r) = -\frac{GMm}{r},$$

donde r es el radio de la órbita circular. La energía cinética del sistema es

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2,$$

estando el Sol en reposo. A partir de la ecuación 23 obtenemos

$$\omega^2 r^2 = \frac{GM}{r},$$

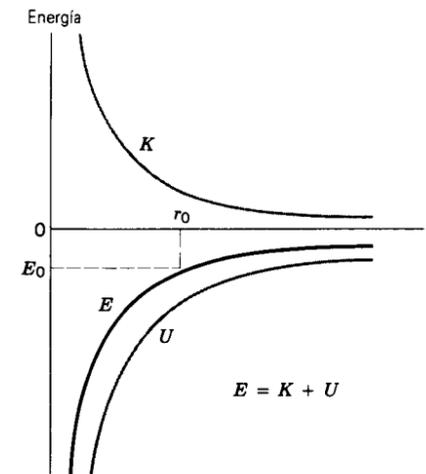


Figura 20 Energía cinética K , energía potencial U , y energía total $E = K + U$ de un cuerpo en movimiento circular planetario. Un planeta con energía total $E_0 < 0$ permanecerá en órbita con un radio r_0 . Cuanto mayor sea la distancia al Sol, mayor será (esto es, menos negativa) su energía total E . Para escapar del centro de fuerza y seguir teniendo energía cinética en el infinito, el planeta necesitaría una energía total positiva.

de modo que

$$K = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r}. \quad (26)$$

La energía total es

$$E = K + U = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}. \quad (27)$$

Esta energía es constante y negativa. La energía cinética nunca puede ser negativa, pero según la ecuación 26 vemos que debe tender hacia cero cuando la separación tiende al infinito. La energía potencial es siempre negativa excepto cuando su valor es cero en la separación infinita. Una consecuencia de la energía total negativa es, entonces, que el sistema es un sistema cerrado, estando ligado el planeta m siempre al centro solar M que lo atrae y sin escapar jamás de él (Fig. 20).

Puede demostrarse* que la ecuación 27 es también válida para órbitas elípticas, si reemplazamos a r por el semieje mayor a . La energía total es todavía negativa, y es también constante, correspondiendo al hecho de que las fuerzas gravitatorias son conservativas. De aquí que tanto la energía total como el ímpetu angular total sean constantes en el movimiento planetario. Estas cantidades suelen llamarse *constantes del movimiento*.

* Véase, por ejemplo, *Newtonian Mechanics*, por A. P. French (Norton, 1971), págs. 585 a 591.

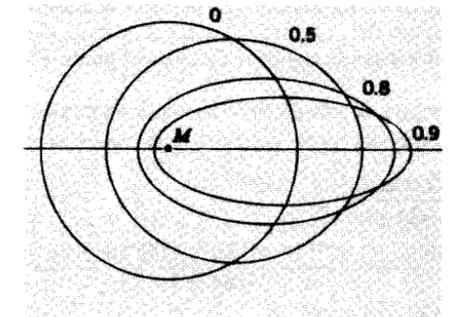


Figura 21 Las cuatro órbitas tienen el mismo semieje mayor a y por lo tanto corresponden a la misma energía total E . Se señalan sus excentricidades.

A causa de que la energía total no depende de la excentricidad de la órbita, todas las órbitas con el mismo semieje mayor a tienen la misma energía total. La figura 21 muestra varias órbitas diferentes que tienen la misma energía.

Si proporcionamos la cantidad apropiada de energía cinética, podemos arreglar que la energía total sea cero o positiva, en cuyo caso las órbitas ya no serán elípticas. Las órbitas son parabólicas para $E = 0$ e hiperbólicas para $E > 0$. Este caso ocurre a menudo en la dispersión de partículas por un núcleo, donde la fuerza electrostática varía también según $1/r^2$. Al vehículo espacial *Pioneer 10* se le dio la energía cinética inicial suficiente para permitirle escapar del sistema solar; lanzado el 3 de marzo de 1972, pasó la órbita de Plutón, el planeta más exterior, el 14 de junio de 1983, en una órbita hiperbólica.

La ecuación 27 muestra que no podemos cambiar la velocidad de un satélite en órbita sin cambiar también el radio de su órbita. Por ejemplo, supongamos que dos satélites se sigan uno al otro en la misma órbita circular. Si el satélite rezagado trata de alcanzar al que va adelante acelerando hacia adelante, y aumentando por lo tanto la energía cinética, la energía total resulta menos negativa y el radio aumenta. ¡El atraque de dos vehículos espaciales no es precisamente un simple ejercicio de acercar un vehículo al otro! De hecho, como lo demuestra el siguiente problema muestra, el procedimiento apropiado que debe seguirse para dar alcance a un vehículo espacial en órbita implica a menudo perder velocidad más bien que ganarla.

Problema muestra 11 Dos vehículos espaciales idénticos, cada uno con una masa de 3250 kg, están en la misma órbita circular a una altura de 270 km sobre la superficie de la Tierra. El vehículo espacial A va 105 s adelante del vehículo espacial B; es decir, A llega a cualquier punto fijo 105 s antes que B. En un punto particular P, el piloto de B dispara un pequeño cohete hacia adelante, reduciendo la velocidad de B en 0.95%. Halle

los parámetros orbitales (energía, periodo, semieje mayor) de *B* antes y después del “disparo del cohete”, y halle el orden de los dos vehículos cuando regresan después al punto *P*.

Solución Para $h = 270$ km, $r = R_T + h = 6370$ km + 270 km = 6640 km. Entonces, antes de disparar el cohete, $a = 6640$ km, y

$$E = -\frac{GmM_T}{2a}$$

$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(3250 \text{ kg})(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{2(6.64 \times 10^6 \text{ m})}$$

$$= -9.76 \times 10^{10} \text{ J},$$

$$T = \left(\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{4\pi^2(6.64 \times 10^6 \text{ m})^3}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}\right)^{1/2}$$

$$= 5.38 \times 10^3 \text{ s}.$$

Las ecuaciones 26 y 27 muestran que (¡para sólo una órbita circular!) la energía cinética es numéricamente igual al negativo de la energía total, de modo que $K = +9.76 \times 10^{10}$ J, y

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(9.76 \times 10^{10} \text{ J})}{3250 \text{ kg}}} = 7.75 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

Después del disparo, la velocidad disminuye en la cantidad dada de 0.95% a $v' = (1 - 0.0095)v = 7.68 \times 10^3$ m/s, y la nueva energía cinética de *B* es

$$K' = \frac{1}{2}(3250 \text{ kg})(7.68 \times 10^3 \text{ m/s})^2 = 9.58 \times 10^{10} \text{ J}.$$

La energía potencial de *B* en el punto *P* inmediatamente después del disparo no ha cambiado, y es igual al valor inicial $E - K$ o $2E$, de acuerdo con la ecuación 27. La energía total E' de *B* después del disparo debe ser entonces

$$E' = K' + U' = 9.58 \times 10^{10} \text{ J} + 2(-9.76 \times 10^{10} \text{ J})$$

$$= -9.94 \times 10^{10} \text{ J},$$

y el nuevo semieje mayor es

$$a' = -\frac{GmM_T}{2E'}$$

$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(3250 \text{ kg})(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{2(-9.94 \times 10^{10} \text{ J})}$$

$$= 6.52 \times 10^6 \text{ m}.$$

El periodo correspondiente es

$$T' = \left(\frac{4\pi^2 a'^3}{GM_T}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{4\pi^2(6.52 \times 10^6 \text{ m})^3}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}\right)^{1/2}$$

$$= 5.24 \times 10^3 \text{ s}.$$

La diferencia entre los periodos es de 140 s. Es decir, si *A* pasa originalmente por el punto *P* en $t = 0$ y *B* pasa (y dispara su cohete) en $t = 105$ s, entonces *A* regresa a *P* en $t = 5380$ s (determinado por el periodo T), y *B* regresa a *P* en 5240 s después de su paso inicial, o en $t = 105 \text{ s} + 5240 \text{ s} = 5345$ s. Entonces, *B* está ahora 35 s adelante de *A* en el punto *P*. Ahora *B* puede disparar un segundo cohete idéntico en fuerza y duración al primero, pero en dirección inversa. Esto trae a *B* a la órbita

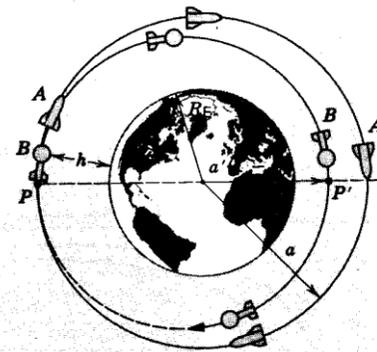


Figura 22 Problema muestra 11. Se muestran las órbitas de los vehículos espaciales *A* y *B*. Nótese que *B* alcanza a *A* al moverse a una órbita no circular de menor altura sobre la Tierra. Los tamaños relativos de la Tierra y de las alturas orbitales no están a escala.

circular original, ahora 35 s adelante de *A*. La figura 22 muestra la relación entre *A* y *B* durante la primera órbita después del disparo.

Vea el problema 71 para ayudarlo a entender cómo *B* puede reducir su velocidad en *P* y sin embargo rebasar a *A*.

16-9 GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Hasta aquí hemos estudiado aplicaciones de la ley de gravitación de Newton en la escala del sistema solar, donde sus predicciones han sido bien probadas. Volvamos ahora a los efectos gravitatorios a escalas mucho mayores.

La figura 23 muestra fotografías de galaxias cuyas estructuras espirales son muy similares a la de nuestra propia galaxia, la Vía Láctea. Quizá haya 10^{11} estrellas unidas entre sí por sus fuerzas gravitatorias mutuas en tal estructura. El diámetro de una galaxia espiral típica podría ser de 50 kpc.* La galaxia de Andrómeda, una prominente vecina galáctica, está a una distancia aproximada de 0.7 Mpc ó 2×10^6 años-luz.

La estructura espiral es común en las galaxias. Una región central brillante está rodeada por un disco plano con varios brazos espirales. Toda la estructura gira en torno a un eje perpendicular al plano del disco.

* Una unidad astronómica (UA) (también conocida por sus siglas en inglés AU, de *astronomical unit*) es igual a la distancia promedio entre la Tierra y el Sol. Un parsec (pc) se define como la distancia a la cual 1 UA subtendería un ángulo de 1" y tiene el valor numérico de 3.084×10^{13} km ó 3.26 años-luz. Los tamaños galácticos se miden típicamente en kiloparsec (kpc) y sus separaciones en megaparsec (Mpc). Véase el capítulo 1, problema 23.



Figura 23 Galaxias espirales típicas similares a nuestra Vía Láctea, vistas desde dos perspectivas diferentes, una normal al plano y otra a lo largo del plano.

Las estrellas individuales están unidas gravitatoriamente a la galaxia por una fuerza dirigida hacia su centro. Podemos usar las leyes de Kepler, tal y como lo hicimos para el sistema solar, para analizar la fuerza gravitatoria. Se ha medido que la velocidad tangencial del Sol respecto al centro galáctico es de alrededor de 220 km/s. (Compárese esto con la velocidad tangencial de la Tierra con respecto al Sol de 30 km/s.) Nuestra distancia al centro de la galaxia es de 8.5 kpc; estamos en uno de los brazos espirales aproximadamente a dos tercios del camino hacia afuera desde el centro de la galaxia. A partir de estas cifras podemos calcular que la velocidad angular del Sol respecto al centro galáctico es $\omega = v/r = 8.4 \times 10^{-16}$ rad/s. A esta velocidad, una rotación completa toma 240 millones de años, y entonces durante su vida de alrededor de 5000 millones de años el Sol ha efectuado ya quizá 20 revoluciones.

La galaxia no gira como un cuerpo rígido; su rotación se parece más bien a la del sistema solar. Suponiendo que podemos aplicar las leyes de Kepler a este sistema, podemos hallar la relación entre la velocidad tangencial y el radio. Para esto conviene reescribir la tercera ley de Kepler, ecuación 24, reemplazando a T por $2\pi/v$:

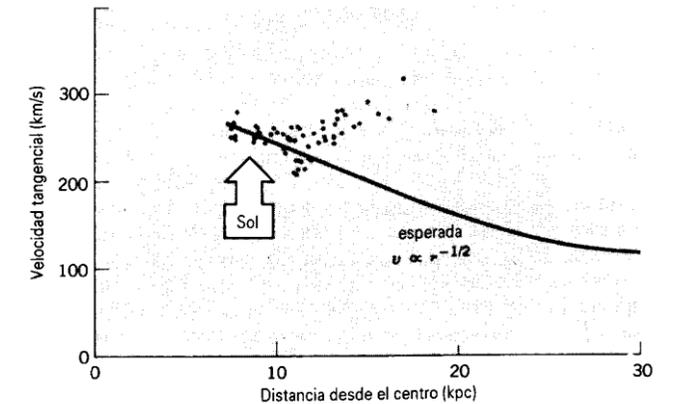


Figura 24 Velocidades tangenciales de las estrellas de nuestra galaxia, deducidas de la medición de los desplazamientos Doppler de sus luces. La línea gruesa muestra la dependencia de v sobre r dada por la ecuación 28 y calculada partiendo de la tercera ley de Kepler, suponiendo que las estrellas son atraídas únicamente por la gran masa central de la galaxia. La discrepancia entre los puntos medidos y la curva sugiere que existe materia invisible que atrae a las estrellas en la región exterior de nuestra galaxia.

$$T^2 = \left(\frac{2\pi r}{v}\right)^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$$

o sea

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (28)$$

Aquí M se refiere a la masa contenida en la región dentro del radio r . Basados en la velocidad tangencial del Sol, podríamos estimar que dentro de la órbita del Sol se encuentra una masa equivalente a 10^{11} masas solares.

Si suponemos que casi toda la masa de nuestra galaxia está en esta región interior, entonces, con base en la ecuación 28 y M considerada como constante, cabría esperar que la v de las estrellas más allá del Sol decreciera al aumentar r . Hasta el punto en que es válida la tercera ley de Kepler y la masa adicional más allá del Sol sea despreciable, v debería disminuir de acuerdo con $r^{-1/2}$.

En vez de esto, observamos que v es constante o quizás aumente ligeramente, incluso hasta el borde mismo de la región visible de nuestra galaxia (Fig. 24). Otras galaxias espirales muestran el mismo efecto. (Estas observaciones se basan en el corrimiento Doppler de la luz emitida por la galaxia; el movimiento de la galaxia en relación a nosotros causa un cambio en la longitud de onda o la frecuencia de su luz en comparación con su valor para el movimiento no relativo; véanse las secciones 21-7 y 42-3. En una galaxia distante en rotación, las partes cuyo movimiento rotatorio es en sentido hacia nosotros tienen corrimiento Doppler opuesto al de las partes que se mue-

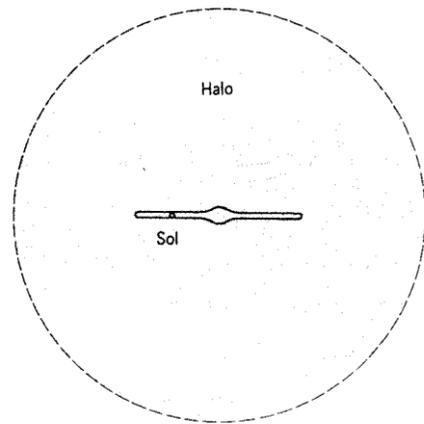


Figura 25 Una representación del "halo" sugerido de materia oscura en nuestra galaxia. Esta materia se hace necesaria para explicar la discrepancia ilustrada en la figura 24, pero no se ha encontrado hasta ahora evidencia directa de ella.

ven alejándose de nosotros, y la velocidad rotatoria a diferentes distancias desde el centro pueden determinarse directamente.) La velocidad permanece aproximadamente constante hasta el límite de la parte visible de las galaxias.

Podemos explicar este efecto con la ecuación 28 si M , que representa la masa contenida dentro de una región esférica de radio r , aumenta al menos linealmente con r . Esto deberá ser así incluso en el límite más externo de la galaxia.

Si suponemos que la masa de una galaxia está en su mayor parte en forma de estrellas (los planetas añaden muy poca masa), entonces este aumento de M con r es inconsistente con las observaciones (Fig. 23), lo cual demuestra claramente la luz (y, por lo tanto, presumiblemente el número de estrellas) concentrada cerca del centro y que disminuye según crece r . Por lo tanto, debe existir una cantidad considerable de *materia oscura* en la galaxia, la cual puede adquirir la forma de un "halo" casi esférico, como se muestra en la figura 25. La forma real de esta materia oscura se desconoce; las hipótesis varían desde estrellas apagadas hasta objetos del tamaño de Júpiter y hasta partículas elementales, pero hasta ahora no hay evidencia experimental directa de la existencia de alguna de ellas.

Se observa que las galaxias forman enjambres (Fig. 26) de quizás 100, ligadas por fuerzas gravitatorias. El tamaño de un enjambre típico es del orden de 1 Mpc, esto es, 100 veces el tamaño de una galaxia típica. Como en el caso de las galaxias mismas, existe un problema de "masa perdida" en los enjambres; la cantidad calculada de materia necesaria para que los enjambres formen un sistema ligado gravitatoriamente es de 10 a 100 veces la cantidad

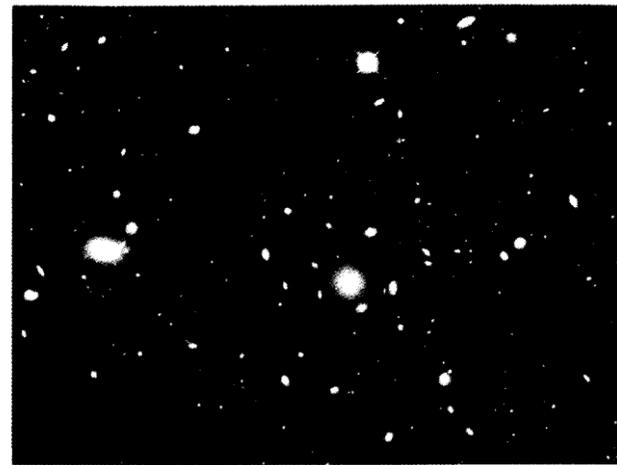


Figura 26 Enjambre de galaxias (llamado el enjambre Coma). Estas galaxias están reunidas en enjambre por sus atracciones gravitatorias entre ellas.

total de materia visible en las galaxias que comprenden los enjambres. Por lo tanto, se ha especulado que puede existir materia oscura no sólo en los halos galácticos sino también en el espacio entre las galaxias; se necesita un halo similar que permee a los enjambres para proporcionar la fuerza gravitatoria que forme un sistema ligado.

Existen también superenjambres ligados gravitatoriamente (enjambres de enjambres en una escala de más allá de los 10 Mpc). Un mapa de los enjambres (Fig. 27) muestra que tienden a concentrarse en superficies que dejan grandes espacios vacíos intermedios con muy poca materia en ellos. La explicación de tales "burbujas" cósmicas aún no se conoce.

La cadena de razonamientos que va de la balanza de Cavendish a los superenjambres es lineal; parte de una medida en laboratorio de la constante G , pasando por un conjunto de leyes dinámicas bien verificadas en el Sistema Solar y llega hasta la extrapolación de que la G medida y de que las leyes de Newton son válidas en todo el universo. Aunque aún queda un buen número de preguntas abiertas, no existe ninguna evidencia firme de que este razonamiento sea incorrecto o de que la gravitación no sea universal.

16-10 LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD (Opcional)

La ley de la gravitación universal de Newton ha tenido un éxito sorprendente en sus aplicaciones. Nos proporciona los medios para calcular con gran precisión los movimientos de los cuerpos en campos gravitatorios. Por ejemplo, podemos enviar sondas espaciales a los planetas y controlar sus trayectorias con aproximación en unos cuantos metros.

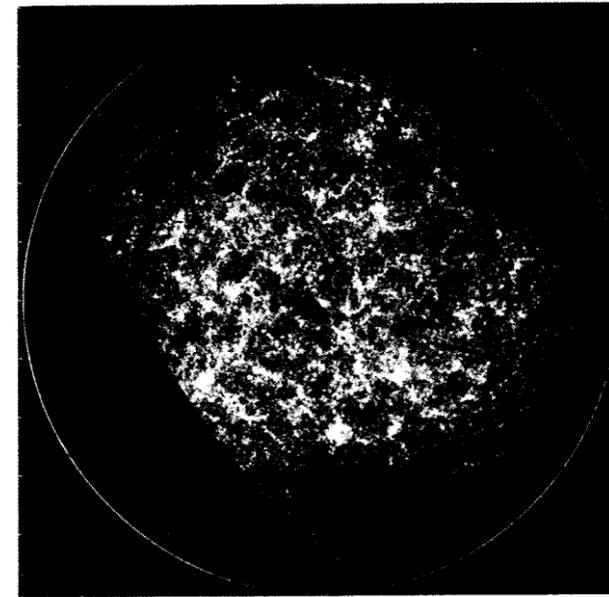


Figura 27 Cada punto representa una galaxia. El mapa, con sus grupos y filamentos, sugiere la existencia de supergrupos. Las proyecciones tridimensionales confirman esta interpretación.

En 1916, Albert Einstein presentó un enfoque diferente para entender la gravitación. En su teoría general de la relatividad propuso que, en contraste con el enfoque de Newton, no es posible separar un sistema de coordenadas de la materia que contiene. La materia gravitatoria, de acuerdo con Einstein, modifica la geometría de su entorno y determina así, en consecuencia, el comportamiento de los cuerpos cercanos.

La relatividad general es difícil tanto conceptual como matemáticamente y pertenece a un nivel superior al de este texto. Así, exponemos aquí algo del fundamento de la teoría, estudiamos alguna de sus implicaciones, y resumimos alguna de las pruebas experimentales principales que distinguen a la teoría de Einstein de la de Newton. Deberá notarse que, en campos gravitatorios débiles, la teoría de Einstein se reduce a la de Newton, de modo que todo lo que hemos hecho hasta ahora en este capítulo permanece correcto. Únicamente en campos gravitatorios fuertes, como en las cercanías del Sol, resultan importantes las diferencias.

Masa inercial y masa gravitatoria

En el capítulo 5 discutimos un procedimiento para asignar masa a un objeto, al comparar su respuesta a una fuerza determinada (es decir, a su aceleración) con la de una masa estándar. Se hace esta comparación con base en la segunda ley de Newton, y la masa que aparece en $F = ma$ se llama *masa inercial*. Podemos también emplear un procedimiento basado en la ley de la gravitación de Newton para medir la masa de un objeto. Medimos la fuerza de un kilogramo patrón en el campo gravitatorio de la Tierra (es decir, su peso), y determinemos luego la fuerza sobre nuestra masa desconocida de la misma manera. De acuerdo con la ecuación 1, la razón entre aquellas fuerzas deberá ser la misma que la razón entre las masas, y por tanto tenemos un

segundo método para determinar la masa. En este caso estamos midiendo la *masa gravitatoria*.

Parece razonable preguntar si estas masas son de hecho la misma. ¿Es igual la masa inercial a la masa gravitatoria? No existe nada en el marco de la dinámica de Newton que exija que sean iguales. Su igualdad debe ser reconocida en la teoría de Newton como una coincidencia asombrosa, pero surge natural en la relatividad general.

Newton fue el primero en probar la igualdad de las masas inercial y gravitatoria, usando un péndulo hecho en forma de caja vacía. Llenó la caja con muestras de materiales diferentes y midió el periodo del péndulo resultante. Si repetimos la derivación de la sección 15-5 para el periodo del péndulo simple, pero ahora teniendo cuidado de separar la masa gravitatoria de la inercial, el resultado es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i L}{m_g g}} \quad (29)$$

donde la m_i del numerador se refiere a la masa inercial de la lenteja del péndulo, y la m_g del denominador se refiere a su masa gravitatoria. Por supuesto, esta ecuación se reduce al resultado conocido cuando $m_i = m_g$. Newton usó pesos idénticos de sustancias diferentes y tuvo cuidado de mantener idénticas a las circunstancias físicas (por ejemplo, la amplitud) en todos los ensayos. Él concluyó que las masas inercial y gravitatoria eran las mismas aproximadamente en una parte en 10^3 .

Una mejora considerable en el experimento fue realizada por Eötvös en 1909. Él usó una balanza de torsión con diferentes materiales en los dos extremos, y comparó la masa gravitatoria (su peso) de cada material con la masa inercial (determinada a partir de la fuerza centrífuga inercial debida a la rotación de la Tierra). Cualquier diferencia entre las masas inercial y gravitatoria de los dos materiales sería observada como una rotación de la balanza de torsión. Eötvös concluyó que las masas inercial y gravitatoria eran iguales dentro de una parte en 10^6 . Posteriores experimentos de Dicke en 1964 y Braginsky en 1972 extendieron los límites hasta una parte entre 10^{11} y 10^{12} usando una técnica similar de la balanza de torsión pero refiriéndola a la atracción gravitatoria del Sol y a la fuerza centrífuga inercial producida por la órbita de la Tierra respecto al Sol. Estos experimentos extremadamente precisos sugieren que no existe una diferencia entre las masas inercial y gravitatoria, y nos obliga a reexaminar nuestras leyes de la dinámica para explicar esta igualdad aparentemente accidental.*

El principio de equivalencia

He aquí cómo se le ocurrió la idea a Einstein: "Estaba yo sentado en la oficina de patentes de Berna cuando de repente acudí a mi mente un pensamiento: Si una persona cae libremente no sentirá su propio peso. Me quedé sobrecogido. Este sencillo pensamiento me causó una honda impresión. Me impulsó hacia una teoría de la gravitación."

La figura 28a muestra a una persona dentro de una cámara aislada en caída libre bajo la gravedad de la Tierra, y la figura 28b muestra a una persona que flota libremente en el espacio interestelar, donde los campos gravitatorios son sumamente débiles. Ningún instrumento de medición que opere completamente dentro de la cámara es capaz de distinguir entre los dos casos.

* Véase "Searching for the Secrets of Gravity", por John Boslough, *National Geographic*, mayo de 1989, pág. 563.

Einstein fue un paso más adelante, como se muestra en la figura 29. Consideremos ahora a la persona dentro de la cámara en reposo sobre la Tierra (Fig. 29a). Se observa que una bola acelera hacia el piso a razón de 9.8 m/s^2 . Un péndulo sencillo de longitud especificada tiene cierto periodo de oscilación. Una masa colgada de un resorte estira al resorte en cierta cantidad. El piso ejerce una determinada fuerza normal sobre los cuerpos que reposan en él.

Supongamos ahora que la cámara es parte de un cohete en el espacio interestelar, y además que los motores se hallan encendidos para darle al cohete una aceleración de exactamente 9.8 m/s^2 (véase la Fig. 29b). Nuestro viajero deja caer ahora una bola y la observa moverse con esa aceleración con relación al suelo.

El péndulo oscila normalmente, la masa estira al resorte en la cantidad apropiada, y el suelo ejerce su fuerza normal correcta. En resumen, no existe ningún experimento que pueda ser llevado a cabo dentro de la cámara que distinga entre la figura 29a (la condición de reposo en un marco inercial dentro de un campo gravitatorio g) y la figura 29b (aceleración $a = -g$ con relación a un marco inercial en el espacio, de gravedad despreciable). Este es el principio de equivalencia.

La igualdad de las masas inercial y gravitatoria se deduce directamente del principio de equivalencia. Hagamos descansar a un objeto sobre una báscula de resorte situada sobre el suelo de la cámara. Cuando la cámara acelera en el cohete, el suelo debe ejercer una fuerza hacia arriba $m_0 a$ para acelerar al objeto; aquí m_0 es la masa inercial, y la báscula de resorte lee la fuerza de reacción (también $m_0 a$) ejercida por el objeto. En cambio, cuando la cámara está en reposo en un campo gravitatorio la báscula marca el peso $m_0 g$ (que depende de la masa gravitatoria). Hemos dispuesto nuestros experimentos de modo que $a = g$, y si las lecturas de la báscula han de ser idénticas (como lo exige el principio de equivalencia) entonces las masas inercial y gravitatoria deben ser iguales.

La teoría general de la relatividad

La relatividad general es esencialmente una teoría de geometría. Proporciona un procedimiento para construir un sistema de coordenadas cuya forma esencial depende de la presencia de materia y de energía. En la teoría de Einstein, la materia dobla o curva el espacio; nuestro conocido sistema de coordenadas rectangulares ya no es estrictamente válido en presencia de la materia. El efecto de la masa que gravita sobre otra es entonces meramente el movimiento de la segunda masa en la geometría distorsionada establecida por la primera.

Este enfoque es similar al concepto de campo que hemos tratado anteriormente en este mismo capítulo. En la teoría del campo, una masa establece un campo gravitatorio, y la segunda masa interactúa entonces con el campo directamente (en lugar de interactuar con la primera masa directamente, como en el enfoque de acción-a-distancia).

La figura 30 muestra una analogía bidimensional de la curvatura del espacio. Imaginemos una lámina de hule con una red de coordenadas extendida sobre ella. Todo movimiento se halla confinado al sistema de coordenadas de la lámina. Imaginemos ahora a una bola de acero estirando a la lámina. La distancia más corta entre dos puntos ya no es aquí una línea recta; de hecho, en tal geometría debemos redefinir precisamente qué entendemos por el término "línea recta."

La relación entre materia y geometría en la relatividad general se ha sintetizado como sigue: "La geometría le dice a la materia cómo moverse, y la materia le dice a la geometría cómo curvar-

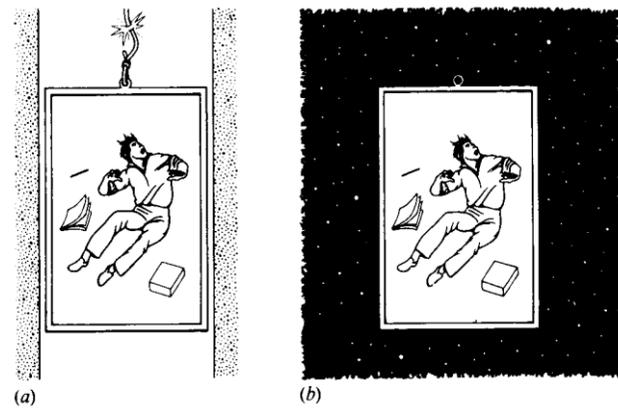


Figura 28 Los efectos de caer libremente bajo la gravedad de la Tierra (a) son idénticos a los de flotar libremente en el espacio interestelar (b). Ningún experimento llevado a cabo dentro de la cámara podría señalar la diferencia.

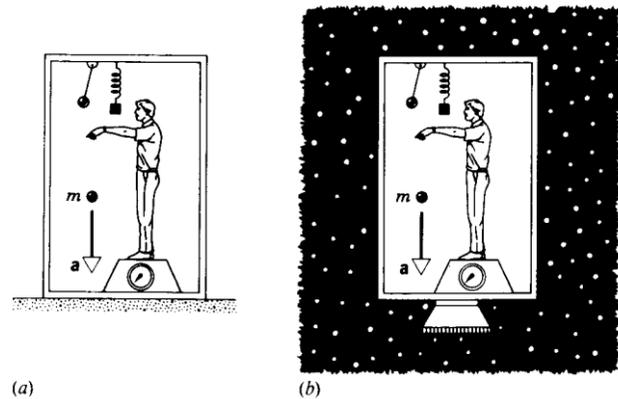


Figura 29 Los efectos de estar en un campo gravitatorio de intensidad g (a) son idénticos a los de acelerar a $a = g$ en el espacio interestelar (b). Ningún experimento llevado a cabo dentro de la cámara podría señalar la diferencia. Esto ilustra el principio de equivalencia de Einstein.

se." Las fórmulas de la relatividad general dan la curvatura para cualquier distribución de materia y de energía, y de ello se deduce directamente el movimiento subsiguiente de los haces de luz o de las partículas.

Pruebas de la relatividad general

Se han llevado a cabo muchas pruebas experimentales para estudiar las pequeñísimas desviaciones entre las teorías gravitatorias de Newton y de Einstein. Las diferencias entre las dos aparecen únicamente en campos gravitatorios fuertes, y en la mayoría de los casos debemos por tanto hacer mediciones cerca del Sol, el cual nos da el campo gravitatorio vecino más fuerte. Existen cuatro pruebas principales de la teoría:

1. **Precesión del perihelio de Mercurio.** Según la relatividad general, la órbita de un planeta no es realmente una elipse

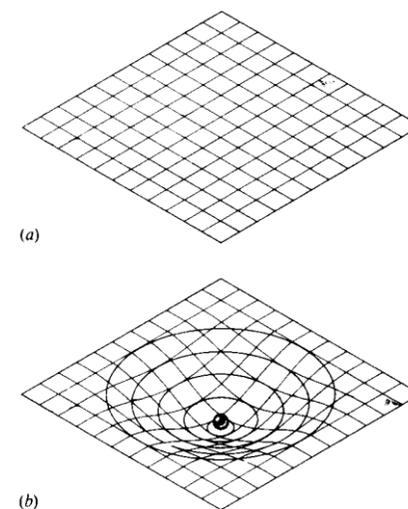


Figura 30 Una analogía que muestra la curvatura del espacio como consecuencia de la presencia de la masa gravitatoria, de acuerdo con la teoría general de la relatividad. La masa distorsiona a la red de coordenadas y cambia su geometría misma.

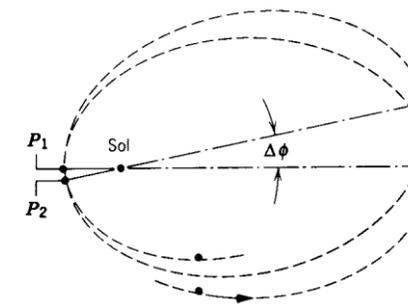


Figura 31 La precesión del perihelio de Mercurio. Con cada órbita alrededor del Sol, la posición del perihelio gira en un pequeño ángulo $\Delta\phi$. El esquema se ha exagerado a propósito; el ángulo real es de alrededor de $0.1''$ por órbita.

cerrada; el eje de la elipse gira un tanto en cada órbita (Fig. 31). Para Mercurio, que está más cerca del Sol y que por lo tanto mostraría el efecto más grande, la rotación predicha es de 42.98 segundos de arco por siglo. Ésta es una rotación increíblemente pequeña, pero que puede medirse con gran precisión: el valor medido es, actualmente, de 43.11 ± 0.21 segundos de arco por siglo, en excelente concordancia con las predicciones de la relatividad general. (Es interesante observar que esta desviación fue advertida por vez primera en 1859 y constituyó un problema serio para la teoría gravitatoria newtoniana antes de que Einstein proporcionara la explicación correcta.)

2. **Desviación de la luz de una estrella cerca del Sol.** Aquí la analogía de la lámina de hule de la figura 30 ofrece una buena imagen de lo que sucede. Cuando la luz de una estrella distante viaja a la Tierra después de haber rozado primero el borde del Sol, su trayectoria se desvía al seguir la ruta más directa a través del espacio curvo (Fig. 32). La posición aparente de la estrella

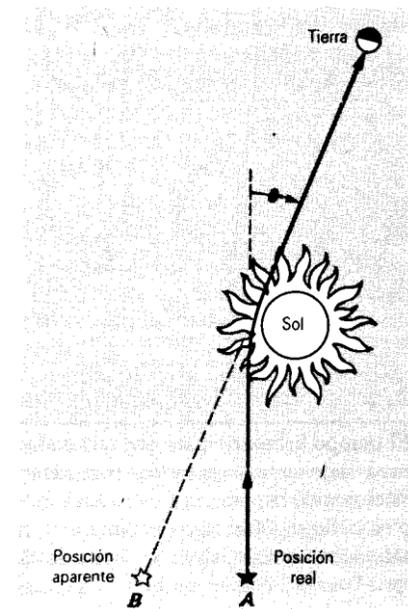


Figura 32 La desviación de la luz de una estrella al pasar cerca del Sol. La curvatura del espacio a causa de la masa del Sol obliga a la luz a viajar en una trayectoria similar a la mostrada en la figura 30b. Como resultado, vemos a una estrella desde la Tierra en una posición aparente B en lugar de verla en su posición real A en que estaría si el Sol no estuviera presente.

vista desde la Tierra se halla un poco desviada de su posición real. Para que las estrellas cercanas al Sol sean visibles, la observación debe efectuarse durante un eclipse solar. Se han llevado a cabo diversas mediciones; la más antigua fue realizada en 1919 justo después de que Einstein propuso su teoría. Aquí, de nuevo la teoría y el experimento están en excelente concordancia a pesar del pequeño efecto; la predicción del ángulo de desviación es de 1.75 segundos de arco, y las observaciones experimentales de las estrellas y de los cuásares confirman este valor dentro del 1% aproximadamente.

3. **Retardo de los ecos de radar.** Cuando un planeta como Venus está detrás del Sol visto desde la Tierra, una señal de radar enviada desde la Tierra a Venus y reflejada por éste sufre un retardo, ya que debe pasar a través del espaciotiempo distorsionado cerca del Sol (Fig. 33). De nuevo la analogía de la lámina de hule proporciona un medio de entender el efecto. Desde este punto de vista, el retardo no está asociado a la curvatura de la trayectoria, sino al "estiramiento" del espacio cerca del Sol. El retardo previsto es del orden de una parte en 10^4 , y ha sido confirmado dentro de un pequeño porcentaje. El límite de la precisión lo imponen las incertidumbres de la superficie del planeta; no sabemos si las señales están siendo reflejadas por montañas o por valles. Una gran mejora fue llevada a cabo mediante los aterrizajes de los Viking en Marte a finales de la década de 1970, lo que dio resultados consistentes con la relatividad general dentro del 0.1%.

4. **Radiación gravitatoria.** Al igual que las cargas eléctricas aceleradas emiten radiación electromagnética que viaja con la velocidad de la luz, así también las masas aceleradas emiten

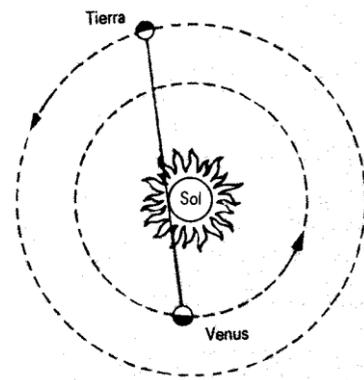


Figura 33 El tiempo necesario para que una onda electromagnética viaje de la Tierra a Venus se demora a causa de la distorsión de la geometría provocada por la masa del Sol, como en la figura 30b. Esta demora puede medirse al observar señales de radar reflejadas a la Tierra desde Venus.

ondas gravitatorias que también viajan con la velocidad de la luz. Muchos grupos experimentales han construido antenas para detectar esta radiación gravitatoria, pero hasta ahora ninguna ha producido una observación carente de ambigüedad. Una evidencia indirecta, y sin embargo muy fuerte, de la emisión de radiación gravitatoria proviene de un pulsar binario. Los pulsares emiten pulsos de radiación electromagnética bien definidos,

PREGUNTAS

1. La astronomía de observación y los procedimientos de navegación modernos hacen uso del punto de vista geocéntrico (o ptolemaico) que emplea la "esfera celeste" giratoria. ¿Es esto erróneo? Si no lo es, ¿qué criterio determina el sistema (copernicano o ptolemaico) que empleamos? ¿Cuándo usaríamos el sistema heliocéntrico (o copernicano)?
2. Existen dos planetas que nunca son visibles a medianoche. ¿Cuáles y por qué no se ven? Puede esto considerarse como una evidencia en favor de la teoría heliocéntrica y contra la teoría geocéntrica?
3. Si la fuerza de la gravedad actúa sobre todos los cuerpos en proporción a sus masas, ¿por qué no cae, en consecuencia, un cuerpo pesado más rápido que un cuerpo ligero?
4. ¿Cómo varía el peso de una sonda espacial en ruta de la Tierra a la Luna? ¿Cambiaría su masa?
5. Nuestro análisis del experimento de Cavendish (véase la Fig. 4 y el problema muestra 1) consideraba la atracción de cada esfera grande sólo para una pequeña esfera cercana a ella. Cada esfera grande atrae también a la esfera pequeña colocada en el extremo opuesto de la varilla. ¿Cuál

que varían poco en el tiempo y que pueden ser medidos con gran precisión. (Véase la Fig. 16 del capítulo 13). Uno de estos pulsares, llamado PSR 1913 + 16, orbita con una estrella acompañante como parte de un sistema binario; el periodo orbital es muy corto, de alrededor de 7.75 h. Los picos agudos de radio proporcionan una manera directa de medir el tiempo de revolución con gran precisión, y poco después de su descubrimiento en 1974 se supo que su periodo orbital había disminuido en alrededor de 64 ns por órbita. El sistema parecía estar perdiendo energía cinética rotatoria, y la única explicación razonable de la pérdida es la energía irradiada como radiación gravitatoria. La pérdida de energía está de acuerdo con la teoría de Einstein en un 3% aproximadamente.

Estas pruebas experimentales precisas han confirmado las predicciones de la relatividad general de manera espectacular. Si bien existen otras teorías gravitatorias no newtonianas, sólo la relatividad general ha sobrevivido a la prueba experimental. Al igual que la relatividad especial, la relatividad general ofrece nuevas nociones acerca del espacio y el tiempo, y quedan aún por hacer diversas pruebas de características aun más exóticas de la teoría. Aun cuando la distinción entre la gravitación newtoniana y einsteiniana tiene poco efecto en nuestra vida cotidiana, las implicaciones fundamentales de nuestra comprensión de este aspecto, por demás básico de la naturaleza demandan que continuemos extendiendo estas mediciones hasta el límite.* ■

* Para un tratamiento elemental y altamente legible de estas mediciones, véase *Was Einstein Right?*, por Clifford M. Will (Basic Books, 1986).

- es el efecto de esta atracción en el cálculo efectuado en el problema muestra 1? Calcule el error que pudiera hacerse en el valor de G calculado, despreciando esta atracción.
6. ¿Se afecta la fuerza gravitatoria mutua ejercida por un par de objetos por la naturaleza del medio entre ellos? ¿Por las temperaturas de los objetos? ¿Por la orientación de los objetos? ¿Cómo podríamos comprobar estos efectos por medio de la experimentación?
7. Debido a que la Tierra está abultada cerca del ecuador, la fuente del río Mississippi (a una latitud de 50° N), aunque a bastante altura sobre el nivel del mar, está alrededor de 5 km más cerca del centro de la Tierra que su desembocadura (a una latitud de 30° N aproximadamente). ¿Cómo puede correr el río "cuesta arriba" al fluir hacia el Sur?
8. ¿Habría en el polo más azúcar en una libra que en el ecuador? ¿Habría más azúcar en un kilogramo?
9. ¿Cómo podríamos determinar la masa de la Luna?
10. Un reloj está basado en un resorte oscilatorio, el otro en un péndulo. Ambos se trasladan a Marte. ¿Indicarán el mismo tiempo allí que el que indicaban en la Tierra? ¿Estarán en consonancia los dos? Explique. Marte tiene

una masa de alrededor de un décimo de la Tierra y un radio de alrededor de la mitad.

11. En la superficie de la Tierra, se le da un golpe horizontal con un martillo a un objeto que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. El objeto es luego llevado a la Luna, soportado de la misma manera, y se le da un golpe igual con el mismo martillo. Hasta donde mejor sabemos, ¿cuál sería la velocidad impartida al objeto en la Luna comparada con la velocidad resultante del golpe en la Tierra (despreciando cualquier efecto atmosférico)?
12. Use argumentos cualitativos para explicar por qué los cuatro periodos siguientes son iguales (todos ellos son de 84 min, suponiendo una densidad uniforme de la Tierra): (a) el tiempo de revolución de un satélite sobre el borde de la superficie de la Tierra; (b) el periodo de oscilación del correo en un túnel que atravesase a la Tierra; (c) el periodo de un péndulo simple que tenga una longitud igual al radio de la Tierra en un campo uniforme de 9.8 m/s^2 ; (d) el periodo de un péndulo simple infinito en el campo gravitatorio real de la Tierra.
13. La fuerza gravitatoria ejercida por el Sol sobre la Luna es de alrededor del doble de la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna. ¿Por qué, entonces, no escapa la Luna de la Tierra?
14. Explique por qué es erróneo el razonamiento siguiente: "El Sol atrae a todos los cuerpos de la Tierra. A medianoche, cuando el Sol está directamente abajo, atrae a un objeto en la misma dirección que la atracción de la Tierra sobre ese objeto; al mediodía, cuando el Sol está directamente arriba, atrae al objeto en dirección opuesta a la atracción de la Tierra. De aquí que todos los objetos deberían ser más pesados a la medianoche (o de noche) que al mediodía (o de día)."
15. La atracción gravitatoria del Sol y de la Luna sobre la Tierra produce mareas. El efecto del Sol sobre las mareas es de aproximadamente la mitad que el de la Luna. Sin embargo, la atracción directa del Sol sobre la Tierra es de alrededor de 175 veces la de la Luna. ¿Por qué, entonces, causa la Luna las mareas más altas?
16. Mareas particularmente altas, llamadas *mareas vivas*, ocurren durante la luna llena y la luna nueva, cuando las configuraciones del Sol, la Tierra, y la Luna son como se muestra en la figura 34. A partir de la figura podríamos concluir (¡incorrectamente!) que los efectos del Sol y de la Luna sobre las mareas tienden a sumarse durante la Luna nueva pero tienden a cancelarse durante la Luna llena. En cambio, se suman en ambas configuraciones. Explique por qué.
17. Si las mareas lunares hacen más lenta la rotación de la Tierra (debido a la fricción), el ímpetu angular de la Tierra disminuye. ¿Qué le pasa al movimiento de la Luna como consecuencia de la conservación del ímpetu angular? ¿Juega aquí el Sol (y las mareas solares) un papel? (Véase "Tides and the Earth-Moon System", por Peter Goldreich, *Scientific American*, abril de 1972, pág. 42).
18. De acuerdo con la segunda ley de Kepler y las observaciones del movimiento del Sol como se le ve desde la Tierra, ¿cómo podemos deducir que la Tierra, en el hemisferio Norte, está más cerca del Sol durante el invierno que

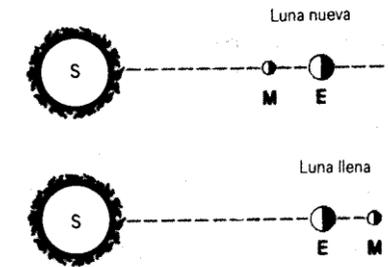


Figura 34 Pregunta 16.

- durante el verano? ¿Por qué no hace más frío en el verano que en el invierno?
19. En el problema muestra 4, el tiempo de tránsito en el túnel se dedujo de la hipótesis de una Tierra de densidad uniforme. ¿Sería este tiempo más largo o más corto si fuese tomada en cuenta la distribución real de la densidad de la Tierra, con su denso núcleo interno? Explique la respuesta.
20. ¿Por qué podemos aprender más sobre la forma de la Tierra estudiando el movimiento de un satélite artificial que por el estudio del movimiento de la Luna?
21. Un satélite en órbita terrestre experimenta una pequeña fuerza de arrastre cuando comienza a ingresar a la atmósfera de nuestro planeta. ¿Qué le sucede a su velocidad? (¡Cuidado!).
22. ¿Cabría esperar que la energía total del sistema solar fuese constante? ¿Y el ímpetu angular total? Explique sus respuestas.
23. ¿Necesita siempre un cohete la velocidad de escape de 11.2 km/s para escapar de la Tierra? De no ser así, ¿qué significa entonces realmente la "velocidad de escape"?
24. Los objetos en reposo sobre la superficie de la Tierra se mueven en trayectorias circulares con un periodo de 24 h. ¿Están en órbita en el sentido en el que un satélite está en órbita? ¿Por qué no? ¿Cuál sería la duración que tendría que tener el "día" para poner a dichos objetos realmente en órbita?
25. Despreciando la fricción del aire y las dificultades técnicas, ¿puede un satélite ponerse en órbita al ser disparado por un cañón enorme en la superficie de la Tierra? Explique su respuesta.
26. ¿Qué ventaja tiene Florida sobre California para lanzar satélites (no polares) en Estados Unidos?
27. ¿Puede un satélite navegar en una órbita estable en un plano que no pase a través del centro de la Tierra? Explique su respuesta.
28. Tal como lo mide un observador en la Tierra, ¿existiría alguna diferencia en los periodos de dos satélites, cada uno en una órbita circular cercana a la Tierra en un plano ecuatorial, pero uno de ellos moviéndose hacia el este y el otro hacia el oeste?
29. Después de que el *Sputnik I* fue puesto en órbita, se dijo que no retornaría a la Tierra sino que se quemaría durante

su descenso. Considerando el hecho de que no se quemó durante su ascenso, ¿cómo es posible esto?

30. Un satélite artificial está en una órbita circular terrestre. ¿Cómo cambiará su órbita si uno de sus motores se enciende momentáneamente (a) dirigido hacia la Tierra, (b) dirigido alejándose de la Tierra, (c) dirigido hacia adelante, (d) dirigido hacia atrás, y (e) dirigido en ángulo recto con el plano de la órbita?
31. Dentro de un vehículo espacial, ¿qué dificultades encontraría usted para caminar, saltar, y beber?
32. Todos hemos visto transmisiones de TV de vehículos espaciales en órbita y hemos observado objetos flotando en una gravedad efectiva nula. Supongamos que un astronauta, abrazado a un marco en el vehículo, le da una patada a una bola de boliche flotante. ¿Resentirá su pie la reacción de la patada? Explique la respuesta.
33. Si un planeta de determinada densidad se hiciera más grande al adherirse a él material del espacio, su fuerza de atracción sobre un objeto situado en su superficie aumentaría a causa de la mayor masa del planeta, pero disminuiría a causa de la mayor distancia del objeto al centro del planeta. ¿Cuál de los dos efectos domina?
34. El campo gravitatorio asociado a la Tierra es de cero tanto en el infinito como en el centro de la Tierra. ¿Es también nulo el potencial gravitatorio en esos lugares? ¿Es realmente el mismo en cada lugar? ¿Puede ser nulo en cualquiera de esos lugares? Debe ser nulo necesariamente en cualquiera de los dos lugares?
35. Las órbitas de los satélites que rodean a la Tierra son elípticas (o circulares) y, sin embargo, hemos sostenido en el capítulo 4 que los proyectiles lanzados desde la Tierra siguen trayectorias parabólicas. ¿Qué es lo correcto?
36. Los satélites artificiales de la Tierra pueden localizar el nivel medio del mar con gran precisión. Sin embargo, sobre rocas bituminosas, el nivel medio del mar puede estar hasta 1 m más alto que sobre otras rocas (las cuales son generalmente más densas). Explique esto.
37. (a) Con objeto de que dos observadores situados en dos posiciones cualesquiera en el ecuador de la Tierra mantengan comunicación por radio al usar satélites en órbita geosíncrona, debe haber cuando menos tres de esos satélites. Explique. (b) Halle la separación angular máxima de dos cualesquiera de esos satélites.
38. Una piedra se deja caer a lo largo del centro del tiro vertical de una mina profunda. Suponga que no existe resistencia del aire pero considere la rotación de la Tierra. ¿Continuaría la piedra a lo largo del centro del tiro? De no ser así, describa el movimiento.
39. ¿Por qué, de hecho no hay atmósfera en la Luna?
40. ¿Requiere la ley de la gravitación universal que los planetas del sistema solar tengan las órbitas realmente observadas? ¿Tendrían las mismas órbitas los planetas de otra estrella similar a nuestro Sol? Sugiera los factores que pudieran haber determinado las órbitas especiales observadas.
41. ¿Importa de qué modo se apunta un cohete para que escape de la Tierra? Suponga, por supuesto, que se apunta sobre el horizonte y desprecie la resistencia del aire.

42. Para llevar a cabo un vuelo a Marte, un cohete se dispara en la dirección en que la Tierra se mueve en su órbita. Para un vuelo a Venus, se le dispara hacia atrás a lo largo de esa órbita. Explique por qué.
43. Saturno está aproximadamente seis veces más alejado del Sol que Marte. ¿Cuál de los dos planetas tiene (a) el periodo de revolución mayor, (b) la velocidad orbital mayor, y (c) la velocidad angular mayor?
44. Véase la figura 35. ¿Qué se expresa en esta gráfica? Asigne números con unidades en cada eje.

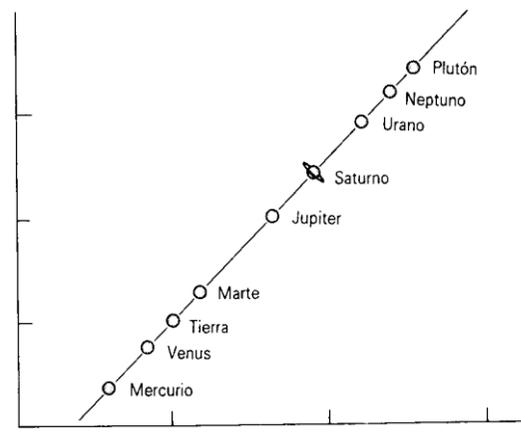


Figura 35 Pregunta 44.

45. ¿Cómo puede deducir el valor de g en la superficie de un planeta previamente desconocido el capitán de un vehículo espacial que navegue hacia ese planeta?
46. Un cubo de hierro se coloca cerca de una esfera de hierro en un lugar alejado de la gravedad de la Tierra. ¿Qué puede usted decir con respecto a la ubicación del centro de gravedad del cubo? ¿Y de la esfera? En general, ¿depende la ubicación del centro de gravedad de un objeto, de la naturaleza del campo gravitatorio en el que esté situado el objeto?
47. ¿Cómo podría usted determinar si dos objetos tienen (a) la misma masa gravitatoria, (b) la misma masa inercial, y (c) el mismo peso?
48. Usted es un pasajero del S.S. *Arthur C. Clarke*, el primer vehículo espacial interestelar. El *Clarke* gira en torno a un eje central para simular la gravedad de la Tierra. Si usted está dentro de una cabina cerrada, ¿cómo podría decir que no está en la Tierra?
49. ¿Puede uno considerar la gravedad como una fuerza "ficticia" que surge de la aceleración del marco de referencia propio con relación a un marco de referencia inercial, en lugar de verla como una fuerza "real"?
50. La representación de la "acción-a-distancia" de la fuerza gravitatoria implica que la acción es instantánea. Realmente, la teoría física actual supone que la gravitación se propaga con una velocidad finita y esto se toma en cuenta en la modificación de la física clásica representada por la teoría general de la relatividad. (Para un estudio de las

ideas e intentos de verificación experimental, véase "Gravitational Waves — A Progress Report", por Jonathan L. Logan, *Physics Today*, marzo de 1973, pág. 44). ¿Qué les sucedería a las deducciones clásicas si se supusiese que la

acción no es instantánea? (Véase también "Infinite Speed of Propagation of Gravitation in Newtonian Physics", por I. J. Good, *American Journal of Physics*, julio de 1975, pág. 640).

PROBLEMAS

Sección 16-3 La constante gravitatoria G

1. En la balanza de Cavendish del problema muestra 1, calcule la fuerza gravitatoria ejercida por una de las esferas grandes sobre la otra esfera grande.
2. El Sol y la Tierra ejercen cada uno una fuerza gravitatoria sobre la Luna. Calcule la razón $F_{\text{sol}}/F_{\text{Tierra}}$ de estas dos fuerzas. (La distancia Sol-Luna promedio es igual a la distancia Sol-Tierra).
3. ¿A qué distancia de la Tierra puede estar una sonda espacial a lo largo de una línea dirigida hacia el Sol de modo que la atracción gravitatoria del Sol equilibre a la de la Tierra?

Sección 16-4 La gravedad cerca de la superficie de la Tierra

4. Uno de los satélites *Echo* constaba de un globo de aluminio inflado de 30 m de diámetro y 20 kg de masa. Un meteorito con masa de 7.0 kg pasa a 3.0 m de la superficie del satélite. Si se ignora el efecto de otros cuerpos distintos al meteorito y al satélite, ¿qué fuerza gravitatoria experimenta el meteorito cuando está más cerca del satélite?
5. Si un péndulo tiene un periodo de 1.00 s en el ecuador, ¿cuál sería su periodo en el polo Sur? Véase la figura 6.
6. Suponga que usted pesa 120 lb al nivel de la banqueta afuera del Centro Mundial de Comercio de la ciudad de Nueva York. Suponga que usted va desde este nivel hasta la cima de una de sus torres de 1350 ft. ¿Cuánto menos pesaría allí a causa de que está ligeramente más alejado del centro de la Tierra?
7. ¿A qué altitud sobre la superficie de la Tierra es la aceleración en caída libre igual a 7.35 m/s^2 (tres cuartos de su valor en la superficie)?
8. Demuestre que la aceleración en caída libre en un planeta hipotético que tenga la mitad del diámetro de la Tierra, pero el doble de su densidad, es la misma que en la Tierra.
9. Una estrella de neutrones típica puede tener una masa igual a la del Sol pero un radio de 10 km únicamente. (a) ¿Cuál es la aceleración gravitatoria en la superficie de una estrella de éstas? (b) ¿A qué velocidad se movería un objeto si cayese desde el reposo a una distancia de 1.20 m en una estrella así?
10. (a) Calcule g_0 en la superficie de la Luna a partir de los valores de la masa y el radio de la Luna dados en el apéndice C. (b) ¿Cuál es el periodo de un "péndulo de segundos" (periodo = 2.00 s en la Tierra) en la superficie de la Luna? (c) ¿Cuánto pesaría un objeto en la superficie de la Luna si pesa 100 N en la superficie de la Tierra?

(d) ¿A cuántos radios de la Tierra debe estar este mismo objeto de la superficie de la Tierra para pesar lo mismo que en la superficie de la Luna?

11. El hecho de que g varía de lugar a lugar sobre la superficie de la Tierra llamó la atención cuando Jean Richer llevó en 1672 un reloj de péndulo desde París hasta Cayena, Guayana Francesa, y halló que se atrasaba 2.5 min/día. Si $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ en París, calcule g en Cayena.
12. Si g se determina dejando caer un objeto a una distancia de 10 m (exactamente), ¿con qué precisión debe medirse el tiempo para obtener un resultado correcto dentro del 0.1%? Calcule un error en porcentaje y un error absoluto, en milisegundos. (b) ¿Con qué precisión tendría que medirse el tiempo (en segundos) de 100 oscilaciones de un péndulo de 10 m de longitud para conseguir el mismo porcentaje de error en la medición de g ?
13. Considérese un marco de referencia inercial cuyo origen esté fijo en el centro de masa del sistema Tierra + objeto que cae. (a) Demuestre que la aceleración hacia el centro de masa de cualquier cuerpo es independiente de la masa de ese cuerpo. (b) Demuestre que la aceleración mutua, o relativa, de los dos cuerpos depende de la suma de las masas de los dos cuerpos. Comente entonces el significado de la aseveración de que un cuerpo cae hacia la Tierra con una aceleración que es independiente de su masa.
14. Dos objetos, cada uno de masa m , se hallan suspendidos de cuerdas de diferentes longitudes de una balanza en la superficie de la Tierra, como se muestra en la figura 36. Si las cuerdas tienen masa despreciable y difieren en longitud por h , (a) demuestre que el error en el peso, asociado al hecho de que W' está más cerca de la Tierra

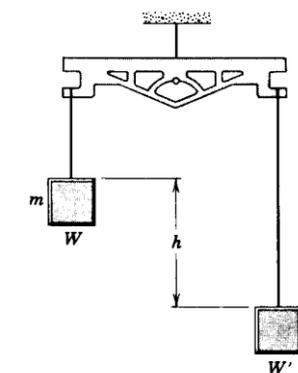


Figura 36 Problema 14.

que W , es $W' - W = 8\pi G\rho mh/3$, donde ρ es la densidad media de la Tierra (5.5 g/cm^3). (b) Halle la diferencia de longitud que dará un error de una parte en un millón.

15. (a) Escriba una expresión para la fuerza ejercida por la Luna, de masa M , sobre una partícula de agua, de masa m , situada en la Tierra en A , directamente bajo la Luna, como se muestra en la figura 37. El radio de la Tierra es R , y la distancia entre los centros de la Tierra y de la Luna es r . (b) Suponga que la partícula de agua está en el centro de la Tierra. ¿Qué fuerza ejercería la Luna allí sobre ella? (c) Demuestre que la diferencia de estas fuerzas está dada por

$$F_T = \frac{2GMmR}{r^3}$$

y que representa a la fuerza de mareas, que es la fuerza sobre el agua con relación a la Tierra. ¿Cuál es la dirección de esta fuerza? (d) Repita el cálculo para una partícula de agua situada en B , en el lado más lejano de la Tierra respecto a la Luna. ¿Cuál es la dirección de esta fuerza? (e) Explique por qué existen dos protuberancias de marea en los océanos (y en la Tierra firme), una que apunta hacia la Luna y la otra en sentido opuesto.

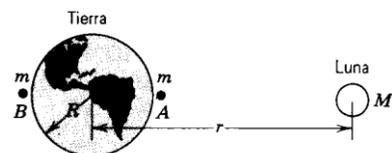


Figura 37 Problema 15.

16. Un objeto está suspendido de una báscula de resorte en un buque que navega a lo largo del ecuador con una velocidad v . Demuestre que la lectura de la escala será muy cercana a $W_0(1 \pm 2\omega v/g)$, donde ω es la velocidad angular de la Tierra y W_0 es la lectura de la escala cuando el buque está en reposo. Explique los signos más o menos.
17. La rotación más rápida posible de un planeta es aquella para la cual la fuerza gravitatoria sobre la materia en el ecuador proporciona apenas la fuerza centrípeta necesaria para la rotación. (¿Por qué?) (a) Demuestre luego que el periodo de rotación más corto correspondiente está dado por

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

donde ρ es la densidad del planeta, suponiendo que ésta sea homogénea. (b) Evalúe el periodo de rotación suponiendo una densidad de 3.0 g/cm^3 , típica de muchos planetas, satélites y asteroides. No se ha encontrado ningún objeto que esté girando con un periodo más corto que el hallado por este análisis.

18. Pueden emplearse medidores sensibles que midan la aceleración en caída libre g local para detectar la presencia de depósitos de rocas cercanos a la superficie de densidad significativamente mayor o menor que la de su entorno; también pueden localizarse cavidades como cavernas y tiros de minas abandonadas. (a) Demuestre que la compo-

nente vertical de g a una distancia x de un punto situado directamente sobre el centro de una caverna esférica (véase la Fig. 38) es menor de lo que cabría suponer, suponiendo una distribución uniforme de roca de densidad ρ , por la cantidad

$$\Delta g = \frac{4\pi}{3} R^3 G \rho \frac{d}{(d^2 + x^2)^{3/2}}$$

donde R es el radio de la caverna y d es la profundidad de su centro. (b) Estos valores de Δg , llamados anomalías, son usualmente muy pequeños y se expresan en miligal, siendo $1 \text{ gal} = 1 \text{ cm/s}^2$. Los ingenieros petroleros, al hacer un levantamiento gravimétrico, hallan que Δg varía desde 10.0 miligal hasta un máximo de 14.0 miligal dentro de una distancia de 150 m . Suponiendo que la anomalía más grande haya sido registrada directamente sobre el centro de una caverna esférica que se sabe está en la región, halle su radio y la profundidad del techo de la caverna en ese punto. Las rocas cercanas tienen una densidad de 2.80 g/cm^3 . (c) Suponga que la caverna, en lugar de estar vacía, está completamente inundada de agua. ¿Qué indican ahora las lecturas de la gravedad hallada en (b) acerca de su radio y su profundidad?

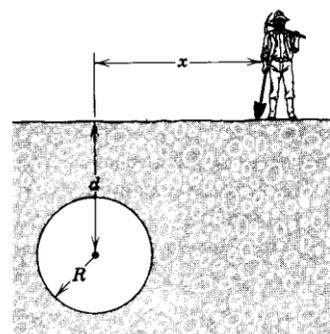


Figura 38 Problema 18.

19. Para repetir un experimento realizado por vez primera públicamente por Foucault en París en 1851 puede emplearse un péndulo cuyo extremo superior esté sujeto de modo que permita al péndulo oscilar libremente en cualquier dirección. Si el péndulo oscila, el plano de la oscilación gira lentamente respecto a una línea trazada sobre el suelo, aun cuando la tensión en el alambre que soporta a la lenteja y la atracción gravitatoria de la Tierra sobre la lenteja estén en un plano vertical. (a) Demuestre que esto es consecuencia de que la Tierra no es un marco de referencia inercial. (b) Demuestre que para un péndulo de Foucault situado en una latitud θ , el periodo de rotación del plano, en horas, es de $24/\sin \theta$. (c) Explique en términos sencillos el resultado en $\theta = 90^\circ$ (los polos) y $\theta = 0^\circ$ (el ecuador).

Sección 16-5 Efecto gravitatorio de una distribución esférica de la materia

20. Dos cascarones esféricos concéntricos de densidad uniforme con masas M_1 y M_2 están situados como se muestra

en la figura 39. Halle la fuerza sobre una partícula de masa m cuando la partícula esté ubicada en (a) $r = a$, (b) $r = b$, y (c) $r = c$. La distancia r se mide desde el centro de los cascarones.

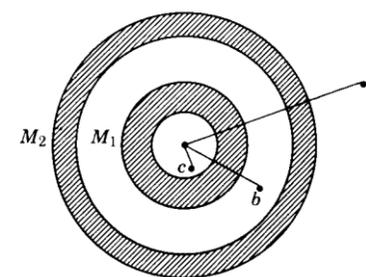


Figura 39 Problema 20.

21. ¿A qué velocidad pasaría el correo por el centro de la Tierra si fuese entregado por medio del ducto del problema muestra 4?
22. Demuestre que, en el fondo de un tiro de mina vertical cavado hasta una profundidad D , el valor medido de g será

$$g = g_s \left(1 - \frac{D}{R}\right),$$

siendo g_s el valor en la superficie. Suponga que la Tierra es una esfera uniforme de radio R .

23. El siguiente problema proviene de un examen "Olimpico" de la Universidad estatal de Moscú en 1946 (véase la Fig. 40): Se practica una oquedad esférica dentro de una esfera de plomo de radio R , de modo que su superficie toque la superficie exterior de la esfera de plomo y pase por su centro. La masa de la esfera antes de practicar la oquedad era M . ¿Con qué fuerza, de acuerdo con la ley de la gravitación universal, atraerá la esfera de plomo ahuecada a una esfera pequeña de masa m , que esté situada a una distancia d del centro de la esfera de plomo en la línea recta que une a los centros de las esferas y de la oquedad?

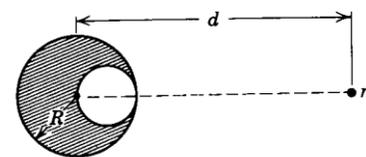


Figura 40 Problema 23.

24. (a) Demuestre que en un ducto que atravesase la Tierra a lo largo de una cuerda en lugar de a lo largo de un diámetro, el movimiento de un objeto sería armónico simple; supóngase una densidad uniforme de la Tierra. (b) Halle el periodo. (c) ¿Adquirirá el objeto la misma velocidad máxima a lo largo de una cuerda que como lo hace a lo largo de un diámetro?

25. La figura 41 muestra, no a escala, una sección transversal del interior de la Tierra. En lugar de ser uniforme, la Tierra está dividida en tres zonas: una corteza, un manto, y un núcleo. Se muestran en la figura las dimensiones de estas zonas y la masa contenida en ellas. La Tierra tiene una masa total de $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ y un radio de 6370 km . Despréciase la rotación y supóngase que la Tierra es esférica. (a) Calcule g en la superficie. (b) Suponga que se perfora un orificio hasta la superficie de contacto entre corteza y manto (el Moho); ¿cuál sería el valor de g en el fondo del orificio? (c) Suponga que la Tierra es una esfera uniforme con la misma masa total y el mismo tamaño. ¿Cuál sería el valor de g a una profundidad de 25 km ? Úsese el resultado del problema 22. Las mediciones precisas de g son muestras sensibles de la estructura interior de la Tierra, aunque los resultados puedan estar oscurecidos por las variaciones de densidad locales y la falta de un conocimiento preciso del valor de G .

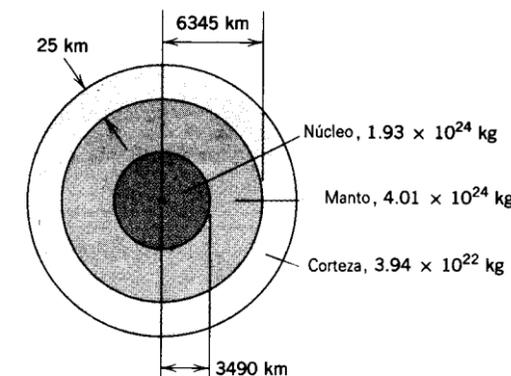


Figura 41 Problemas 25 y 26.

26. Utilice el modelo de la Tierra mostrado en la figura 41 para examinar la variación de g con la profundidad en el interior de la Tierra. (a) Halle g en la superficie de contacto núcleo-manto. ¿Cómo varía g desde esta superficie de contacto hasta el centro de la Tierra? (b) Demuestre que g tiene un mínimo local dentro del manto; halle la distancia del centro de la Tierra donde ocurre esto y el valor de g asociado. (c) Haga un diagrama que muestre la variación de g dentro de la Tierra.

27. (a) La figura 42a muestra un objeto planetario de densidad uniforme ρ y radio R . Demuestre que el esfuerzo de compresión S cerca del centro está dado por

$$S = \frac{3}{8}\pi G \rho^2 R^2.$$

(Sugerencia: Construya una columna angosta de área A en su sección transversal que se extienda desde el centro hasta la superficie. El peso del material de la columna es mg_{prom} , donde m es la masa de material en la columna y g_{prom} es el valor de g en el punto medio entre el centro y la superficie.) (b) En nuestro sistema solar, los objetos (por ejemplo los asteroides, los satélites pequeños, los cometas) con "diámetros" menores de 600 km pueden ser de

$$S = \frac{3}{2}\pi G\rho^2 R^2.$$

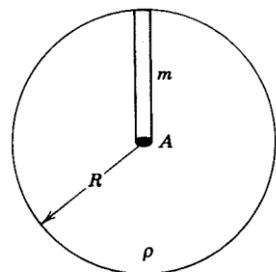


Figura 42 Problema 27.

forma muy irregular (véase la Fig. 42b, que muestra a Hiperión, un pequeño satélite de Saturno), mientras que los de diámetros más grandes son esféricos. Un objeto puede mantener una forma distinta a la esférica únicamente si las rocas que lo constituyen tienen la resistencia suficiente para resistir a la fuerza de la gravedad. Calcule el límite de resistencia a la compresión de las rocas que forman a los asteroides. Suponga una densidad de 4000 kg/m^3 . (c) ¿Cuál es el tamaño más grande posible de un satélite autogravitante no esférico hecho de concreto (véase la tabla 1, capítulo 14); supóngase que $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$.

28. Una partícula de masa m está situada a una distancia y de una barra infinitamente larga de densidad de masa lineal λ . Demuestre que la fuerza gravitatoria entre la barra y la partícula es $F = 2Gm\lambda/y$, dirigida perpendicularmente a la barra. (Sugerencia: Haga que la perpendicular de la partícula a la barra defina el origen. Considere dos incrementos de masa $dm = \lambda dx$ ubicados a $\pm x$ a lo largo de la barra. Calcule la fuerza total dF (magnitud y dirección) ejercida sobre la partícula por estos dos incrementos de masa. Luego, integre sobre x desde cero hasta el infinito).
29. Considere una partícula en un punto P situado en cualquier lugar dentro de un cascarón esférico de materia. Suponga que el cascarón es de espesor y densidad uniformes. Contruya un doble cono angosto con las puntas en P que intercepte las áreas dA_1 y dA_2 del cascarón (Fig. 43). (a) Demuestre que la fuerza gravitatoria resultante ejercida sobre la partícula en P por los elementos de masa inter-

ceptados es cero. (b) Demuestre luego que la fuerza gravitatoria resultante de todo el cascarón sobre una partícula interna es cero. (Este método fue ideado por Newton.)

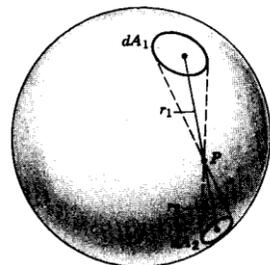


Figura 43 Problema 29.

Sección 16-6 Energía potencial gravitatoria

30. Se ha conjeturado que una estrella en "extinción" pudiera colapsarse a un "radio gravitatorio", definido como el radio para el cual el trabajo necesario para retirar a un objeto de masa m de la superficie de la estrella hasta el infinito es igual a la energía en reposo mc^2 del objeto. Demuestre que el radio gravitatorio del Sol es GM_\odot/c^2 y determine su valor en términos del radio actual del Sol. (Para una revisión de este fenómeno véase "Black Holes: New Horizons in Gravitational Theory", por Philip C. Peters, *American Scientist*, sept.-oct. de 1974, pág. 575).
31. Un vehículo espacial marcha inactivo en la periferia de nuestra galaxia, a 80,000 años luz del centro galáctico. ¿Qué velocidad mínima deberá tener si queremos que escape enteramente de la atracción gravitatoria de la galaxia? La masa de la galaxia es 1.4×10^{11} veces la de nuestro Sol. Suponga, para simplificar, que el material que forma a la galaxia está distribuido con una simetría esférica.
32. Demuestre que la velocidad de escape desde el Sol a la distancia de la Tierra al Sol es $\sqrt{2}$ veces la velocidad de la Tierra en su órbita, suponiendo que ésta sea circular. (Éste es un caso específico de resultado general para las órbitas circulares: $v_{\text{esc}} = \sqrt{2} v_{\text{orb}}$.)
33. Un cohete es acelerado hasta que alcanza una velocidad de $v = \sqrt{2gR_T}$ cerca de la superficie de la Tierra y entonces se aleja radialmente sin propulsión. (a) Demuestre que escapará de la Tierra. (b) Demuestre que muy lejos de la Tierra su velocidad es $V = \sqrt{2gR_T}$.
34. El Sol, de $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ de masa, gira alrededor del centro de la galaxia de la Vía Láctea, que está a una distancia de $2.2 \times 10^{20} \text{ m}$. Completa una revolución cada 2.5×10^8 años. Calcule el número de estrellas en la Vía Láctea. (Sugerencia: Suponga, para simplificar, que las estrellas están distribuidas con simetría esférica en torno al centro galáctico y que nuestro Sol está en el borde de la galaxia.)
35. Una esfera de materia, de masa M y radio a , tiene una cavidad concéntrica de radio b , como se muestra en sección transversal en la figura 44. (a) Grafique la fuerza gravitatoria F ejercida por la esfera sobre una partícula de

masa m , situada a una distancia r del centro de la esfera, en función de r en el intervalo $0 \leq r \leq \infty$. Considere en particular los puntos $r = 0, b, a, \infty$. (b) Grafique la energía potencial $U(r)$ del sistema. (c) A partir de estas gráficas, ¿cómo podrían obtenerse gráficas de la intensidad del campo gravitatorio y del potencial gravitatorio debido a la esfera?

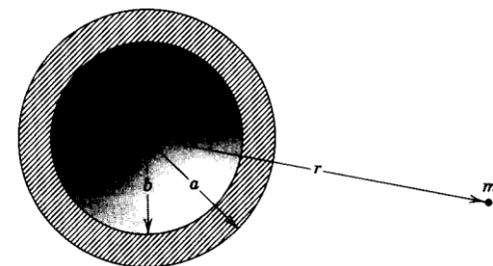


Figura 44 Problema 35.

36. Un proyectil se dispara verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 9.42 m/s . Despreciando la fricción atmosférica, ¿a qué distancia de la superficie de la Tierra llegará?
37. Esferas de 2.53 kg y 7.16 kg de masa están fijadas a una distancia de 1.56 m entre sus centros. Una esfera de 212 g se coloca a 42.0 cm del centro de la esfera de 7.16 kg , a lo largo de la línea de los centros. ¿Cuánto trabajo deberá efectuar un agente externo para mover la esfera de 212 g a lo largo de la línea de los centros y situarla a 42.0 cm del centro de la esfera de 2.53 kg ?
38. Un cohete agota su combustible a una altitud h sobre la superficie de la Tierra. Su velocidad v_0 al agotarse el combustible supera a la velocidad de escape v_{esc} correspondiente a la altitud de agotamiento. Demuestre que la velocidad v del cohete muy lejos de la Tierra está dada por
- $$v = (v_0^2 - v_{\text{esc}}^2)^{1/2}.$$
39. (a) Calcule la velocidad de escape de Europa, un satélite del planeta Júpiter. El radio de Europa es de 1569 km y su aceleración en caída libre en la superficie es de 1.30 m/s^2 . (b) ¿A qué altura se elevará una partícula si abandona la superficie del satélite con una velocidad vertical de 1.01 km/s ? (c) ¿Con qué velocidad golpeará un objeto al satélite si se deja caer desde una altura de 1000 km ? (d) Calcule la masa de Europa.
40. Un sistema de dos estrellas de $3.22 \times 10^{30} \text{ kg}$ de masa cada una gira en torno a su centro de masa común, situado a una distancia de $1.12 \times 10^{11} \text{ m}$. (a) Calcule su periodo de revolución común, en años. (b) Suponga que un meteoroi- de (pequeña partícula sólida en el espacio) pase por este centro de masa moviéndose en ángulo recto con el plano orbital de las estrellas. ¿Cuál debe ser su velocidad para escapar del campo gravitatorio de la estrella doble?
41. Dos estrellas neutrálicas están separadas por una distancia de 93.4 km entre centros. Cada una tiene una masa de

$1.56 \times 10^{30} \text{ kg}$ y un radio de 12.6 km . Inicialmente están en reposo una respecto a la otra. (a) ¿A qué velocidad se moverán cuando su separación haya disminuido a la mitad de su valor inicial? (b) ¿A qué velocidad se mueven en el momento antes de colisionar? Desprecie los efectos relativistas.

42. Varios planetas (los gigantes gaseosos Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno) poseen anillos circundantes casi circulares, compuestos quizá de un material que no se constituyó en satélite. Además, muchas galaxias contienen estructuras en forma de anillo. Considere un anillo homogéneo de masa M y radio R . (a) Halle una expresión para la fuerza gravitatoria ejercida por el anillo sobre una partícula de masa m localizada a una distancia x del centro del anillo a lo largo de su eje. Véase la figura 45. (b) Suponga que la partícula cae desde el reposo como consecuencia de la atracción del anillo de materia. Halle una expresión para la velocidad con la que pasa por el centro del anillo.

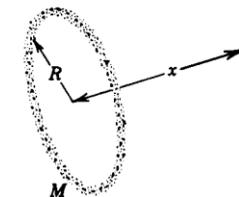


Figura 45 Problema 42.

43. Dos partículas de masas m y M están inicialmente en reposo a una distancia infinita entre ellas. Demuestre que en cualquier instante su velocidad relativa de acercamiento atribuible a la atracción gravitatoria es $\sqrt{2G(M+m)/d}$, donde d es su separación en ese instante.

Sección 16-8 Los movimientos de planetas y satélites

44. La distancia media de Marte al Sol es 1.52 veces la de la Tierra al Sol. A partir de esto, calcule el número de años necesario para que Marte complete una revolución en torno al Sol; compare su respuesta con el valor dado en el apéndice C.
45. El planeta Marte tiene un satélite, Fobos, que viaja en una órbita de 9400 km de radio con un periodo de $7 \text{ h } 39 \text{ min}$. Calcule la masa de Marte a partir de esta información. (La masa de Fobos es despreciable comparada con la de Marte.)
46. Determine la masa de la Tierra a partir del periodo T y del radio r de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra: $T = 27.3$ días y $r = 3.82 \times 10^5 \text{ km}$.
47. Un satélite se sitúa en una órbita circular con un radio igual a la mitad del radio de la órbita de la Luna. ¿Cuál es el periodo de revolución en meses lunares? (Un mes lunar es el periodo de revolución de la Luna.)
48. Se han colocado satélites espía en la órbita geosíncrona sobre el ecuador de la Tierra. ¿Cuál es la mayor latitud L desde la que los satélites son visibles en la superficie de la Tierra? Véase la figura 46.

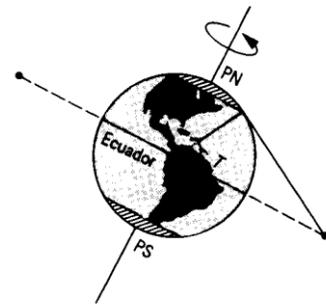


Figura 46 Problema 48.

49. Un vehículo espacial de reconocimiento rodea a la Luna a una altitud muy baja. Calcule (a) su velocidad y (b) su periodo de revolución. Refiérase al apéndice C para los datos necesarios de la Luna.
50. Considere dos satélites A y B de igual masa m , que se mueven en la misma órbita circular de radio r alrededor de la Tierra T pero en sentidos de revolución opuestos y, por lo tanto, en vías de colisión (véase la Fig. 47). (a) En términos de G , M_T , m y r , halle la energía mecánica total del sistema Tierra más los dos satélites antes de la colisión. (b) Si la colisión es completamente inelástica de modo que los restos permanezcan como una sola pieza de material mezclado, halle la energía mecánica total inmediatamente después de la colisión. (c) Describa el movimiento subsiguiente de los restos.

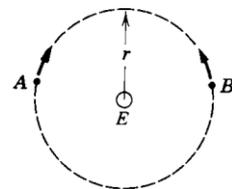


Figura 47 Problema 50.

51. El centro del Sol está en uno de los focos de la órbita de la Tierra. ¿A qué distancia está el otro foco? Exprese su respuesta en términos del radio del Sol $R_s = 6.96 \times 10^8$ m. La excentricidad de la órbita de la Tierra es de 0.0167 y el semieje mayor tiene 1.50×10^{11} m.
52. Use la conservación de la energía y la ecuación 27 de la energía total para demostrar que la velocidad v de un objeto situado en una órbita elíptica satisface la relación

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

53. Un cometa que se mueve en una órbita con 0.880 de excentricidad tiene una velocidad de 3.72 km/s cuando está más distante del Sol. Halle su velocidad cuando está más cercano al Sol.
54. Un satélite que se mueve en una órbita elíptica está a 2360 km sobre la superficie de la Tierra en su punto más

alejado y a 1180 km en su punto más cercano. Calcule (a) el semieje mayor, (b) la excentricidad de la órbita, y (c) el periodo de revolución.

55. Considere un satélite artificial situado en una órbita circular alrededor de la Tierra. Establezca cómo varían las siguientes propiedades del satélite con el radio r de su órbita: (a) periodo, (b) energía cinética, (c) ímpetu angular, y (d) velocidad.
56. (a) Exprese la constante G de la gravitación universal que aparece en la ley de la gravedad de Newton en términos de la unidad astronómica UA como unidad de longitud, la masa solar M_s como unidad de masa, y el año como unidad de tiempo. (1 UA = 1.496×10^{11} m, $1 M_s = 1.99 \times 10^{30}$ kg, 1 año = 3.156×10^7 s.) (b) ¿Qué forma adquiere la tercera ley de Kepler (Ec. 24) en estas unidades?

57. En el año de 1610 Galileo construyó un telescopio, lo dirigió hacia Júpiter, y descubrió cuatro lunas prominentes. Los radios de sus órbitas medias a y sus periodos T son

Nombre	a (10^8 m)	T (días)
Io	4.22	1.77
Europa	6.71	3.55
Ganimedes	10.7	7.16
Calixto	18.8	16.7

(a) Grafique el $\log a$ (eje y) contra el $\log T$ (eje x) y demuestre que se obtiene una línea recta. (b) Mida su pendiente y compárela con el valor que cabe esperar partiendo de la tercera ley de Kepler. (c) Halle la masa de Júpiter a partir de la intersección de esta línea con el eje y . (Nota: puede usar también papel log-log para gráficas.)

58. Demuestre cómo, guiado por la tercera ley de Kepler, Newton pudo deducir que la fuerza que mantiene a la Luna en su órbita, supuesta circular, debe variar según el inverso de los cuadrados de la distancia desde el centro de la Tierra.
59. La mayoría de los asteroides giran alrededor del Sol entre Marte y Júpiter. Sin embargo, varios "asteroides Apolo" de diámetros de unos 30 km se mueven en órbitas que cruzan la órbita terrestre. En la figura 48 se muestra la órbita de uno de ellos. Tomando las medidas directamente de la figura, deduzca el periodo de revolución del asteroide en años. (Se calcula que, finalmente, estos asteroides chocarán con la Tierra.)

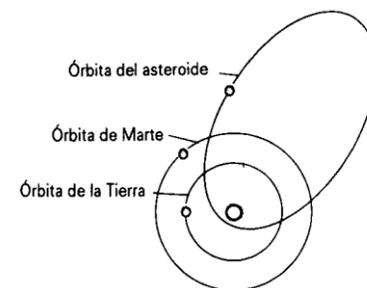


Figura 48 Problema 59.

60. Un satélite en órbita elíptica de excentricidad e tiene una velocidad v_a en el apogeo, v_p en el perigeo, y v_0 en los extremos del eje menor de su órbita. Demuestre que (a) $v_p/v_a = (1+e)/(1-e)$, y (b) $v_0/v_a = (v_p/v_a)^{1/2}$.
61. Cierta sistema de estrellas triples consta de dos estrellas, cada una de masa m , que giran en torno a una estrella central, de masa M , en la misma órbita circular. Las dos estrellas están situadas en los extremos opuestos de un diámetro de la órbita circular; véase la figura 49. Derive una expresión para el periodo de revolución de las estrellas; el radio de la órbita es r .

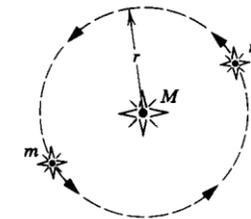


Figura 49 Problema 61.

62. Un par de estrellas gira con respecto a su centro de masa común. Una de las estrellas tiene una masa M que es el doble de la masa m de la otra; esto es, $M = 2m$. Sus centros están a una distancia d entre sí, siendo d grande en comparación con el tamaño de cualquiera de las estrellas. (a) Derive una expresión para el periodo de revolución de las estrellas alrededor de su centro de masa común en términos de d , m , y G . (b) Compare los ímpetus angulares de las dos estrellas en torno a su centro de masa común calculando la razón L_m/L_M . (c) Compare las energías cinéticas de las dos estrellas calculando la razón K_m/K_M .
63. Un satélite viaja inicialmente en una órbita aproximadamente circular a 640 km sobre la superficie de la Tierra; su masa es de 220 kg. (a) Determine su velocidad. (b) Determine su periodo de revolución. (c) Por varias causas el satélite pierde energía mecánica a razón de (en promedio) 1.40×10^5 J por revolución orbital. Adoptando la aproximación razonable de que la trayectoria sea un "círculo con un radio que disminuye lentamente", determine la distancia desde la superficie de la Tierra, la velocidad, y el periodo del satélite al final de su revolución orbital núm. 1500. (d) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza retardante promedio? (e) ¿Se conserva el ímpetu angular?
64. Un sistema binario de estrellas consta de dos estrellas, cada una con la misma masa que el Sol, que gira en torno al centro de masa común del sistema. La distancia entre ellas es la misma que la distancia entre la Tierra y el Sol. ¿Cuál es el periodo de revolución en años?
65. (a) ¿Se consume la misma energía al llevar un satélite a 1600 km de la Tierra que al ponerlo en órbita una vez que está a esa distancia? (b) ¿Qué sucede con 3200 km? (c) ¿Y qué, a 4800 km? Considere que el radio de la Tierra es de 6400 km.
66. Una posibilidad de dañar a un satélite en órbita terrestre es lanzar un enjambre de bolitas de modo tal que se

muevan en la misma órbita que el satélite pero en dirección opuesta. Considere un satélite en órbita circular cuya altitud sobre la superficie de la Tierra es de 500 km. Un sensor a bordo detecta una bolita de 10.0 g que se acerca y determina que es inevitable una colisión frontal. (a) ¿Cuál es la energía cinética de la bolita que se acerca en el marco de referencia del satélite? (b) ¿Cómo se compara ésta con la energía cinética de la posta de un rifle moderno del ejército? Una posta de éstas tiene una masa de 4.00 g y una velocidad de salida de 950 m/s.

67. El asteroide Eros, uno de los muchos planetas menores que giran alrededor del Sol en la región comprendida entre Marte y Júpiter, tiene un radio de 7.0 km y una masa de 5.0×10^{15} kg. (a) Si usted estuviera en Eros, ¿podría levantar un camión de 2000 kg? (b) ¿Podría correr lo suficientemente rápido como para ponerse a sí mismo en órbita? Desprecie los efectos debidos a la rotación del asteroide. (Nota: Los récords olímpicos para los 400 m planos corresponden a velocidades de 9.1 m/s para los hombres y 8.2 m/s para las mujeres.)

68. La órbita de la Tierra en torno al Sol es casi circular. Las distancias más cercana y más lejana son de 1.47×10^8 km y 1.52×10^8 km, respectivamente. Determine las variaciones máximas de (a) la energía potencial, (b) la energía cinética, (c) la energía total, y (d) la velocidad orbital que resulta del cambio en la distancia Tierra-Sol en el transcurso de 1 año. (Sugerencia: Use la conservación de la energía y el ímpetu angular.)

69. Suponga que un satélite de comunicaciones geosíncrono está en órbita en la longitud de Chicago. Usted está en Chicago y quiere captar sus señales. ¿En qué dirección debería usted apuntar el eje de su antena parabólica? La latitud de Chicago es de 47.5° N.

70. ¿Qué velocidad inicial mínima (medida respecto a la Tierra) debe ser impartida a un objeto que está en reposo sobre la superficie de la Tierra para que escape no solamente del campo gravitatorio terrestre sino también del Sol? Desprecie la rotación de la Tierra pero no su movimiento orbital alrededor del Sol. (Sugerencia: Observe que para una velocidad mínima el objeto debe proyectarse en dirección del movimiento orbital de la Tierra. Trate el problema en dos etapas, el escape desde el Sol después del escape de la Tierra. La velocidad orbital de la Tierra, v_0 , une a los dos marcos de referencia implicados.)

71. Usando los datos del problema muestra 11, calcule (a) la velocidad del vehículo espacial B cuando pasa por el punto P' , y (b) la velocidad promedio del vehículo espacial B en la órbita después de haber agotado su combustible. Aproxime la trayectoria de B a un círculo. Compare estos resultados con las cantidades correspondientes del vehículo espacial A.

72. Un satélite meteorológico está en una órbita geosíncrona, quieto sobre Nairobi, ciudad muy cercana al ecuador. Si el radio de su órbita se aumenta en 1.00 km, ¿a qué razón y en qué dirección se movería su punto de referencia, que anteriormente estaba estacionario, en la superficie de la Tierra?

73. Tres estrellas idénticas de masa M están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado L . ¿A qué

velocidad deben moverse si giran todas bajo la influencia de la gravedad mutua en una órbita circular que circunscribe al triángulo equilátero y cuya forma se mantiene?

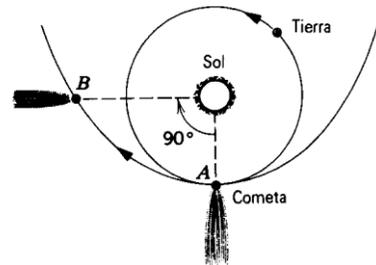


Figura 50 Problema 74.

74. ¿Cuánto tiempo le tomaría a un cometa, que se mueve en una trayectoria parabólica, moverse desde su punto de acercamiento más próximo al Sol en A (véase la Fig. 50) en un ángulo de 90° , medido en el Sol, hasta B ? Sea la distancia de acercamiento más próxima al Sol igual al radio de la órbita de la Tierra, supuesta circular.

75. Imaginemos un planeta de masa M con una pequeña luna de masa m y radio a que gira a su alrededor manteniendo la misma cara hacia él. Si ahora la luna se aproxima al planeta, existirá una distancia crítica medida desde el centro del planeta a la cual se levantaría material suelto de la superficie de la luna. Demuestre que esta distancia está dada por $r_c = a(3M/m)^{1/3}$. Esta distancia crítica recibe el nombre de *límite de Roche*.
76. (a) Demuestre que el problema de los dos cuerpos de la sección 16-8 puede simplificarse a un problema de un cuerpo con el uso del concepto de masa reducida de la sección 15-10. Es decir, demuestre que si usamos $\mu = mM/(m + M)$ en lugar de m , donde μ es la masa reducida, podemos tratar el movimiento de m con relación a M exactamente como si M fuese el origen de nuestro marco de referencias inercial. (b) Demuestre que la hipótesis expresada en la sección 16-8 de que R es despreciablemente pequeño comparado con r es equivalente a suponer que la masa reducida μ es igual a m . (c) Compare a μ del sistema Tierra-Sol con la masa de la Tierra; compare a μ del sistema Luna-Tierra con la masa de la Luna. (d) Si utilizáramos la masa reducida μ del sistema de dos cuerpos en lugar de m , ¿en qué afectaría esto a las ecuaciones de la sección 16-8?

CAPÍTULO 17

ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS

La mayor parte de la materia puede ser convenientemente descrita clasificándola dentro de una de las tres fases: sólida, líquida, o gaseosa. Los sólidos y los líquidos (llamados también materia condensada) tienen cierto grupo de propiedades en común; por ejemplo, son relativamente incompresibles a la vez que su densidad permanece relativamente constante cuando varía su temperatura (manteniendo también otras propiedades, como la presión, constantes). Por otra parte, los gases son fácilmente compresibles y su densidad cambia de manera sustancial con la temperatura cuando la presión se mantiene constante.

Desde una perspectiva diferente, podemos agrupar en forma conjunta a los gases y a los líquidos bajo la denominación común de fluidos. La palabra "fluido" proviene del latín fluere, que significa "fluir o manar". Los fluidos fluyen, por ejemplo, para adquirir la forma del recipiente que los contenga; los sólidos no comparten esta propiedad. En el sólido, los átomos permanecen relativamente fijos en su ordenamiento; en el fluido, los átomos pueden moverse entre sí.

En este capítulo consideraremos las propiedades de los fluidos en reposo y las leyes por las que se rigen. En el capítulo siguiente estudiaremos las propiedades dinámicas de los fluidos en movimiento.

17-1 FLUIDOS Y SÓLIDOS

En nuestra experiencia cotidiana tenemos una idea clara de la distinción entre fluidos y sólidos pero, como suele suceder en la ciencia, las experiencias cotidianas se obtienen dentro de circunstancias muy limitadas, y extrapolarlas demasiado lejos puede conducir a conclusiones incorrectas. Por ejemplo, partiendo de la experiencia cotidiana podemos proponer la distinción siguiente: el sólido conserva su forma pero el fluido fluye para adoptar la forma de su recipiente. Por otra parte, ciertas sustancias no pueden ser clasificadas con tanta facilidad. Por ejemplo, el vidrio debería clasificarse como fluido; aunque parece que mantiene su forma, el vidrio fluye durante un periodo grande de tiempo. Las ventanas de vidrio que han permanecido durante muchos años son, si las medimos más gruesas en la parte inferior que en la parte superior.

Otra forma un tanto intermedia es la sustancia plástica, la cual puede moldearse o dársele forma. Consideremos, por ejemplo, la arcilla. Mantiene su forma relativamente bien, y nos resistiríamos a clasificarla como un fluido, pero al aplicar *presión* sobre ella podemos forzarla a

adoptar la forma de su recipiente. Puede hacerse que otras sustancias, a las que podríamos identificar como sólidas en la experiencia ordinaria, fluyan bajo una presión lo bastante elevada.

Por supuesto, estamos familiarizados con el cambio de estado de la materia al cambiar su temperatura, que podría fundir o evaporar esa materia. Pero estamos menos familiarizados con el cambio de estado de la materia cuando cambia la presión sobre ella, en parte porque el intervalo de presiones necesarias está, generalmente, más allá de nuestra experiencia normal. Por ejemplo, el aluminio puede estirarse para hacer de él alambre si lo hacemos pasar a través de un orificio pequeño y puede moldearse de formas diversas sometiéndolo en un troquel, a la acción de una presión elevada. Las capas de roca en plegamientos profundos que vemos a menudo en las carreteras que cruzan una montaña, son evidencia de que la "roca sólida" llega a fluir también bajo una presión suficientemente elevada.

Existe aún otra fase de la materia que no puede fácilmente clasificarse como sólido, líquido, o gas. Un *plasma* es un gas en el que los átomos están ionizados, de modo que forman una mezcla eléctricamente neutra que con-